Pricing Avancé pour Exotiques

MASTER - SMTR - INSEEC 2019 - 2020

FINKEYS FRANCE

Enseignant

Philippe DUCHEMIN, Consultant Formateur
Contrôleur de Gestion – Easybike Group
FINKEYS France
www.finkeys.com

Consultant

- **BRED**: comptabilité bancaire, **BNP IP**: Sovency 2, **BNPP**: cash management international, **CNP**: système front to compta, **SOCIETE GENERALE SGCIB** Product Control Group, **CNCE**: projet ALM, **NATIXIS SDR**: réconciliation PnL, **VINCI** Trésorerie: Financial Reporting **CACIB:** Fusion des Dérivés de Taux, Structurés de Crédit, **XRT / SAGE**, Progiciel pour Trésoriers, **ABN AMRO**: Validation VAR group, Amsterdam

Banque

- **Crédit Lyonnais Londres**, responsable Middle Office, **Crédit Lyonnais Paris**, Suivi d'Activité: P&L et Risques, **Chambre Syndicale des Banques Populaires**: Groupe de Recherche Opérationnelle

Formateur

- Organismes professionnels: First Finance, Top Finance, Investance, Spring Finance, Centre de Formation Continue de Science Po, Programme CE.com Banque de France, Masters en Finance, Etranger: Alger, Tunis, Casablanca, Lisbonne, Luxembourg, Hanoi

Objectifs

Finance Appliquée:

- Valorisations d’instruments financiers: options exotiques
- Modèles et principes mathématiques
- Applications Excel
- Programmes VBA
- Méthodes numériques de calcul des options
  - Méthodes discrètes
  - Méthodes analytiques
  - Méthodes monte carlo

Objectifs

Concepts Financiers

- Théorie de la Finance et Théorie de l’Arbitrage
- Loi: Absence d’Opportunité d’Arbitrage (AOA)
- Probabilité risque neutre
- Loi de changement de numéraire
- Classification des instruments financiers

Pratiques Excel

- Calcul matriciel
- Fonctions VBA et Excel
- Fonctions Statistiques

Programme

1. Rappels mathématiques et financiers
2. Le modèle BSM
3. Le modèle Binomial mono période
4. La théorie de l'arbitrage
5. La théorie de l'arbitrage appliquée aux options
6. Le modèle binomial multi périodes
7. Les Options Digitales
8. La méthode quasi monte carlo
9. L'option d'échange
10. Les options Quanto Combo

Rappels

Finance

- Généralités sur la Finance
- Taux d'intérêt, actuariat
- Modèle Binomial d'évaluation d'option

Mathématiques

- Coefficient Binomial, comptage de chemins
- Loi Binomiale

Excel

- Opérations sur les matrices
- Liste des fonctions Excel utiles

Finance

Les marchés financiers primaires

- Trading des actifs élémentaires
- Loi de l'offre et de la demande

Les marchés financiers secondaires ou « dérivés »

- Les produits exotiques, structurés, dérivés
- Loi unique: AOA

Le reste, n'est qu'une combinaison

1 – Rappels mathématiques et financiers

FINKEYS FRANCE

Transformation des taux d'intérêt

Données:

Le taux d'intérêt annuel: R

Le taux d'intérêt de la période: r

La durée totale T en années (nombre décimal).

Le nombre de périodes: n

Etapes:

Durée de la période: t = T / n

Formule de conversion: $$(1+R)^{T} = (1+r)^{n}$$

Les formules de p et q, utilisent le taux période T: (1+R)

$$(1 + \mathrm{TAUX\_an}) = e^{\mathrm{c}}$$

$$\left(1 + \frac{\mathrm{TAUX\_p}}{\mathrm{p}}\right)^{\mathrm{p}} = \left(1 + \frac{\mathrm{TAUX\_q}}{\mathrm{q}}\right)^{\mathrm{q}}$$

c: taux d'intérêt continu

Matrices/Tables

Référencement des plages: Excel gère les cellules (A1) et les plages de cellules (range A1:B4)

- cellule = une case ou 1x1
- plage carrée = une table n x n
- plage rectangulaire = une table n x m

Il est possible d'effectuer des calculs matriciels directement sur ces plages, au lieu d'effectuer un calcul cellule par cellule

Les fonctions matricielles, avec en sortie une matrice, se manipulent:

- Sélection de la plage de sortie
- Saisie de la fonction
- Ctrl Maj Entrée

La sélection se retrouve entre accolades : { }

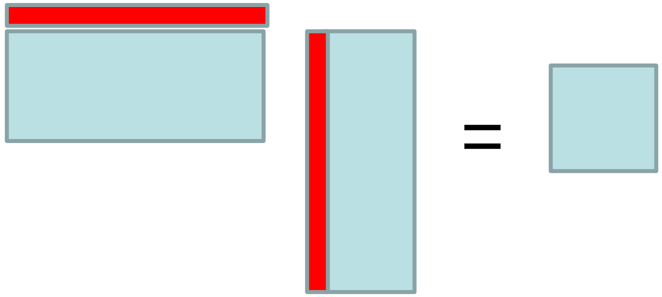
Utilisation des Matrices/Tables

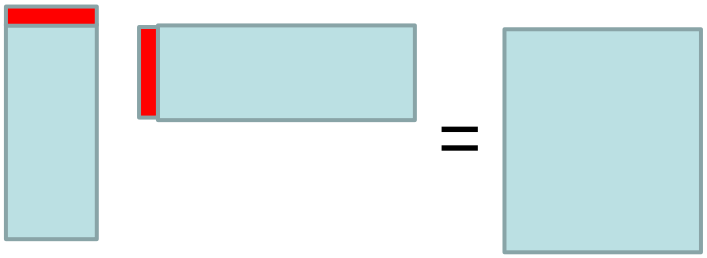
Opérations terme à terme sur 2 tables identiques

- Addition et soustraction
- Multiplication
- Multiplication d’une matrice par un scalaire
- Division

Produit matriciel au sens mathématique de A (nxm) par B (mxp)

Condition: le nombre de colonnes de A = le nombre de lignes de B





Utilisation des Matrices/Tables

Les Fonctions Matricielles usuelles:

TRANSPOSE (tableau)	Renvoie une plage verticale de cellules sous forme de plage horizontale, ou vice versa.
PRODUITMAT (matrice1; matrice2)	Calcule le produit de deux matrices.
MATINVERSE (matrice)	Renvoie la matrice inverse de la matrice spécifiée.
DETERMAT (matrice)	Donne le déterminant d'une matrice.

Entrer : **Ctrl + Maj ( ) Entrée ( )** pour générer une formule entre {}

Exercice CalcMatrix.xlsm

Loi normale

Densité de la loi normale, avec 1 argument x, et 2 paramètres (m, σ)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\exp\left(-\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma}\right)\right)$$

Cas Standard, avec

moyennes nulles: m=0

écart type unitaire: σ=1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Fonction Excel avec 1 arguments N(x,y,ρ)= $\int_{-\infty}^{x} f(x).dx$

LOI.NORMALE.STANDARD(x)

Relations: N(x) + N(-x) = 1

exemple: LOI.NORMALE.STANDARD(0,7) = 0,758036

Coefficient du Binôme

Définition du coefficient du binôme, basée sur la fonction Factorielle:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(i!)(n-i)!} \qquad n! = n.(n-1).(n-2)....4.3.2.1$$

Définition: nombre d'ensemble de k éléments parmi un ensemble de n éléments.

Formule du binôme:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^i.b^{n-i}$$

Fonction Excel:

COMBIN (nb total d'éléments, nb d'éléments choisis)

FACT (n) = donne la factorielle du nombre n

FACT(5) = 1.2.3.4.5 = 120

COMBIN(6,4) = COMBIN(6,2) = 6.5/2 = 15

Loi Binomiale

Loi de probabilité discrète: B(n,p)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De moyenne: = n . p

De Variance: = n . p . (1-p)

Si n grand, converge vers la loi normale

Triangle de Pascal

Chaque case est la somme du dessus et de gauche

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Coefficient du Binome

```
Function COMB(N , K )
Dim mini as long, maxi as long
Dim i as integer
mini = (N > K) * (K - N) + N
maxi = (N < K) * (K - N) + N
comb = maxi + 1
    For i = 2 To mini
       comb = comb * (maxi + i) / i
    Next i
End Function
```

Call

Pay-off: modèle Monte Carlo:

CALL = MAX(S-K , 0) à l'échéance

Formule analytique

$$Call = N(d_1)S - \frac{N(d_2)}{(1+r)^T}K$$

Formule binomiale

$$Call = \sum_{i=wc}^{n} \binom{n}{i} . p*^{i} . q*^{n-i} \, S - \frac{K}{(1+r)^n} \sum_{i=wc}^{n} \binom{n}{i} . p^{i} . q^{n-i}$$

Classeur Excel

Fonctions Excel à développer

COMB	coefficient du binome

CND	loi normale standard
BSM	MODELE BLACK SHOLES MERTON

BINO	Loi binomiale
CRR	MODELE COX ROSS RUBINSTEIN

BOXMULLER	générateur de loi normale
HALTON	généraleur de nombre
QMC	MODELE QUASI MONTE CARLO

2 – Modèle BSM

FINKEYS FRANCE

Modèle BSM – Options FX

BSM avec 2 devises: modèle de Garman-Kolhagen utilisé pour les options de change.

$$CALL = \frac{N(d_1)}{(1+f.t)}S - \frac{N(d_2)}{(1+d.t)}K$$

$$PUT = -\frac{N(-d_1)}{(1+f.t)}S + \frac{N(-d_2)}{(1+d.t)}K$$

$$F = \frac{(1+d.t)}{(1+f.t)}S = e^{(d-f)t}S$$

$$\ln\left(\frac{F}{S}\right) = (d-f).t$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (d-f)t + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (d-f)t - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_1.\sigma.\sqrt{t} = \ln\left(\frac{F}{K}\right) + \sigma^2 t/2 \qquad d_2.\sigma.\sqrt{t} = \ln\left(\frac{F}{K}\right) - \sigma^2 t/2$$

Code VBA – BSM

```
Function BSM(PC, S , K, T, R, Vol)
'PC = 1 pour CALL et PC=-1 pour PUT
Dim d1 As Double, d2 As Double
  d1 = (Log(S / K) + (R + Vol ^ 2 / 2) * T) / (Vol * Sqr(T))
  d2 = d1 - Vol * Sqr(T)
  BSM = PC * S * CND(PC * d1) - PC * K * CND(PC * d2) / (1 + R) ^ T
End Function
```

```
Function CND(x)
CND = Application.WorksheetFunction.NormSDist(x)
End Function
```

Exercice 04 – Exercice BSM

S=100, K=105, σ=20%, R=2%, T= 2 ans

Calculer le CALL et le PUT

Décomposer en options digitales

CND: loi normale cumulée (Cumulated Normal Distribution)

CND	
0	0,500000
0,95	0,828944
-0,95	0,171056
	1,000000
0,99	0,838913
-0,99	0,161087
	1,000000

Exercice 04 - Correction

S=100, K=105, σ=20%, R=2%, T= 2 ans

S/K	0,95238
vol.sqrt(T)	0,28284
LN(S/K)	-0,04879
vol.vol.T	0,08
(d-f)T	0,04
DF	1,0404

BSM	call	put
binaire cash	43,550427	57,372295
binaire titre	54,393149	45,606851
total = BSM	10,842723	11,765445

LN(S/K)	-0,04879	-0,0487902
(d-f)T	0,04000	0,04000
vol.vol.T/2	0,04000	-0,04000
	0,03121	-0,0487902

d1 d2 -d1 -d2	0,11034	-0,1724993	-0,1103434	0,17249928
CND(d1)	0,543931	0,431523	0,456069	0,568477
S K S K	100	105	100	105
	54,39315	45,30986	45,60685	59,69014
DF	1	0,9611688	1	0,96116878
	54,3931	43,550427	45,606851	57,372295
		10,842723		11,765445

Transformation du Call en Put

Transformation S <-> 1/S (exemple du change)

Inversion du sous-jacent: (S;K) devient (1/S, 1/K)

Echange de d% et f%.

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (d-f)t + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \quad d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (d-f)t - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

CALL = (S,K,d,f,σ) = PUT (1/S,1/K,f,d,σ)

CALL (S,K,T,r,f,σ) = K/S.PUT(S,(S.S/K),T,r,f,σ)

CALL(S,K,rd,rf,σ) = -PUT(K,S,rf,rd,-σ),

3 - Le Modèle Binomial

Modèle Binomial

Définition du modèle entre 2 dates: T_0 et T_1

Marché avec 2 actifs: l'actif sans risque et l'actif risqué

Modélisation de l'actif sans risque:

- taux sans risque annuel: r
- passage de C_0 en T_0 à $C_0.(1+r.t)$ en T_1 (avec durée annuelle t=1)

Modélisation de l'actif risqué avec 2 scénarios:

Espace de probabilité à 2 états: u (up) et d (down)

- prix d'origine: S_0
- variation à la hausse: u (up)
- variation à la baisse: d (down)

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{S_1^+ = S_0 * u} \\
\boxed{S_0} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{S_1^- = S_0 * d}
\end{tikzcd}
$$

Réplication de portefeuille

Modèle à 1 période et 2 instants: T_0 et T_1

Portefeuille avec 2 actifs: actif risqué (S) et actif sans risque (C)

L'instrument financier possède en T_0 la valeur V_0

et en T_1 les valeurs:

- scénario u: V_{1+}
- scénario d: V_{1-}

$$V_0 \rightarrow V_{1+}, \quad V_0 \rightarrow V_{1-}$$

On cherche à répliquer l'instrument financier

en vue du calcul de son prix à l'instant T_0: V_0

2 inconnues : C (cash) en actif sans risque

Δ (delta) en actif risqué.

6 variables: V_{1+} , V_{1-} (instrument)

et S_0 ,u, d et r (marché)

Equations

Modèle à 1 période et 2 instants: T_0 et T_1

Equations:

$$V_{1+} = C(1 + rt) + \Delta.S.u$$

$$V_{1-} = C(1 + rt) + \Delta.S.d$$

et

$$V_0 = C + \Delta.S$$

Solutions

Solutions:

$$\Delta = \frac{V_{1+} - V_{1-}}{S(u-d)}$$

$$C = \frac{V_{1+}.d - V_{1-}.u}{(1+rt).(u-d)}$$

d'où la valeur du portefeuille égale à la valeur de l'instrument:

$$V_0 = C + \Delta.S = \frac{V_{1+}.d - V_{1-}.u}{(1+rt).(u-d)} + \frac{V_{1+} - V_{1-}}{(u-d)}$$

$$V_0 = \frac{1}{(1+rt)}\left[\frac{(1+rt)-d}{(u-d)}V_{1+} + \frac{u-(1+rt)}{(u-d)}V_{1-}\right]$$

Réplication de portefeuille

$$V_0 = \frac{1}{(1+rt)}\left[\frac{(1+rt)-d}{(u-d)}V_{1+} + \frac{u-(1+rt)}{(u-d)}V_{1-}\right]$$

On pose: $$p = \frac{(1+rt)-d}{(u-d)} \qquad q = \frac{u-(1+rt)}{(u-d)}$$

Pour obtenir: $$V_0 = \frac{1}{(1+rt)}[p.V_{1+} + q.V_{1-}]$$

p et q sont des probabilités risque – neutre: p+q=1

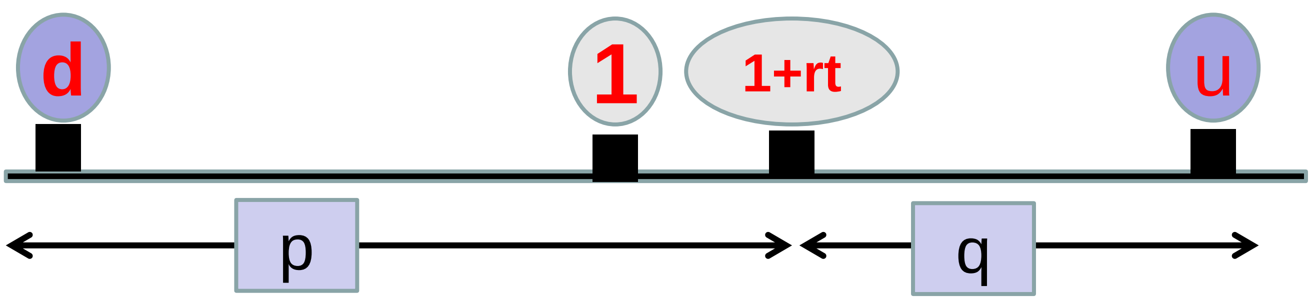
Remarque fondamentale: p et q ne dépendent pas de S_0

Probabilités Risque Neutre

$$p = \frac{(1 + rt) - d}{(u - d)} \qquad q = \frac{u - (1 + rt)}{(u - d)}$$

Non arbitrage: $d < 1 < (1 + r.t) < u$

Alors: p > 0 et q > 0



$$p > q \quad ou \quad p < q$$

Exercice 01

Marché :

$u=2$, $d=1/2$, $r=1/4$, $S_0=4$

Durée de la période: t=1 an

Instruments: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculer la réplication de l'instrument: Δ et C

Calculer V_0 directement avec la réplication

Calculer les probabilités RN (p et q) et V_0

Exercice 01 - correction

Calculer Δ et C, avec les données suivantes:

Marché : u=2, d=1/2, r=1/4, S_0=4

Instruments:

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{V1^{+} - V1^{-}}{S1^{+} - S1^{-}} = \frac{V1^{+} - V1^{-}}{S0.(u-d)} \qquad \Delta = \frac{1-0}{8-2} = \frac{1}{6} \qquad \Delta = \frac{0-1}{8-2} = -\frac{1}{6}$$

$$C = \frac{V1^{+}.dS0 - V1^{-}.uS0}{(1+r)(S1^{-} - S1^{+})} = \frac{V1^{+}.d - V1^{-}.u}{(1+r).(d-du} \quad C = \frac{1.2-0.8}{(\frac{5}{4})(2-8)} = \frac{2.4}{-5.6} = \frac{-4}{15} \quad C = \frac{16}{15}$$

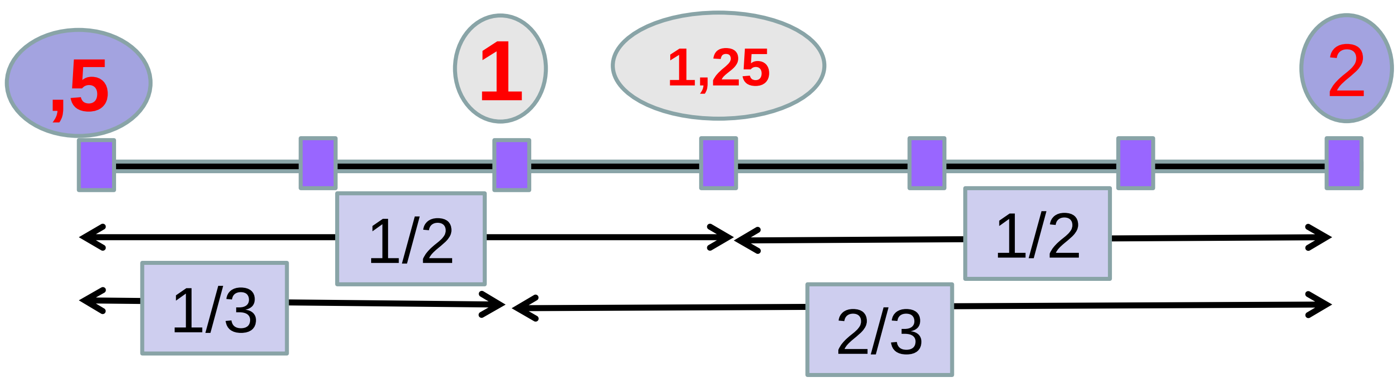
$$V0 = C + \Delta S0 \qquad V0 = \frac{-4}{15} + \frac{1}{6}4 = \frac{2}{5} \qquad V0 = \frac{16}{15} - \frac{1}{6}4 = \frac{2}{5}$$

Exercice 01 - correction

$$p = \frac{1,25-0,5}{(2-0,5)} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{2-1,25}{(2-0,5)} = \frac{1}{2}$$

Non arbitrage: $0\ 5 < 1 < 1,25 < 2$

Avec:



Exercice 01 - correction

Calculer Δ et C, avec les données suivantes:

Marché : u=2, d=1/2, r=1/4, S_0=4

Instrument $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$p = \frac{(1+rt)-d}{(u-d)} = \frac{\frac{5}{4}-1/2}{(2-1/2)} = \frac{3.2}{4.3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{q} = \frac{u-(1+rt)}{(u-d)} = \frac{2-\frac{5}{4}}{(2-1/2)} = \frac{3.2}{4.3} = \frac{1}{2}$$

$$V0 = \frac{1}{1+rt}(pV1^{+} + qV1^{-}) \qquad V0 = \frac{4}{5}.\frac{1}{2}.1 = \frac{2}{5}$$

Autres Probabilités

Autre Relation: p u + q d = 1+r.t

$$\frac{(1+rt)-d}{u-d}.u+\frac{u-(1+rt)}{u-d}.d=\frac{(1+rt)u-1+1-(1+rt)d}{u-d}=(1+rt)$$

Cela permet de définir une autre probabilité, avec:

$$\frac{p.u}{(1+rt)}+\frac{q.d}{(1+rt)}=1$$

On pose:

$$p^*=\frac{p.u}{(1+rt)}=\frac{u-\frac{1}{1+rt}}{(u-d)}>p$$

$$q^*=\frac{q.d}{(1+rt)}=\frac{\frac{1}{1+rt}-d}{(u-d)}<q$$

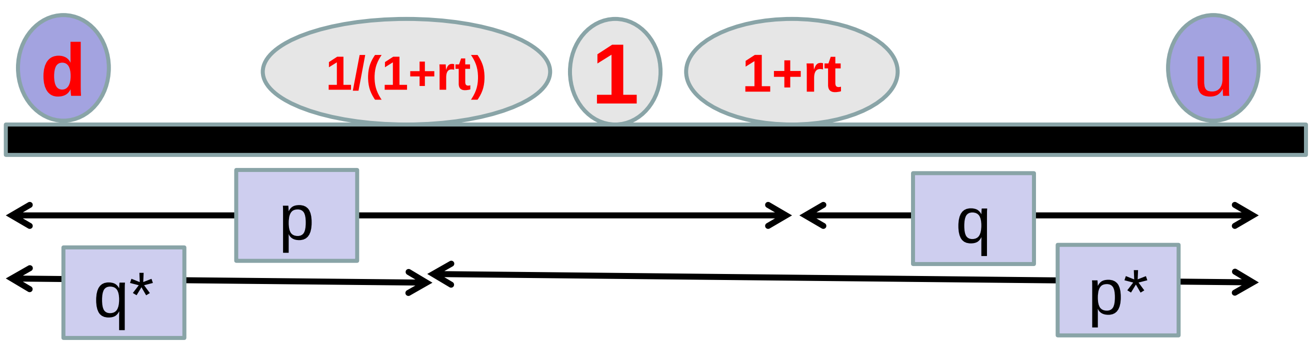
Probabilités Risque Neutre

$$p = \frac{(1 + rt) - d}{(u - d)} \qquad q = \frac{u - (1 + rt)}{(u - d)}$$

$$p^* = \frac{p.u}{1 + r.t} = \frac{u - \frac{1}{1 + rt}}{(u - d)} \qquad q^* = \frac{q.d}{1 + r.t} = \frac{\frac{1}{1 + rt} - d}{(u - d)}$$

Non arbitrage: $d < \frac{1}{(1 + r.t)} < 1 < (1 + r.t) < u$

Avec:



$$q^* < q < 0.5 < p < p^*$$

Option de Change

Probabilités Risque Neutre, avec

- taux domestique: d %
- taux foreign: f %

Déport: d>f

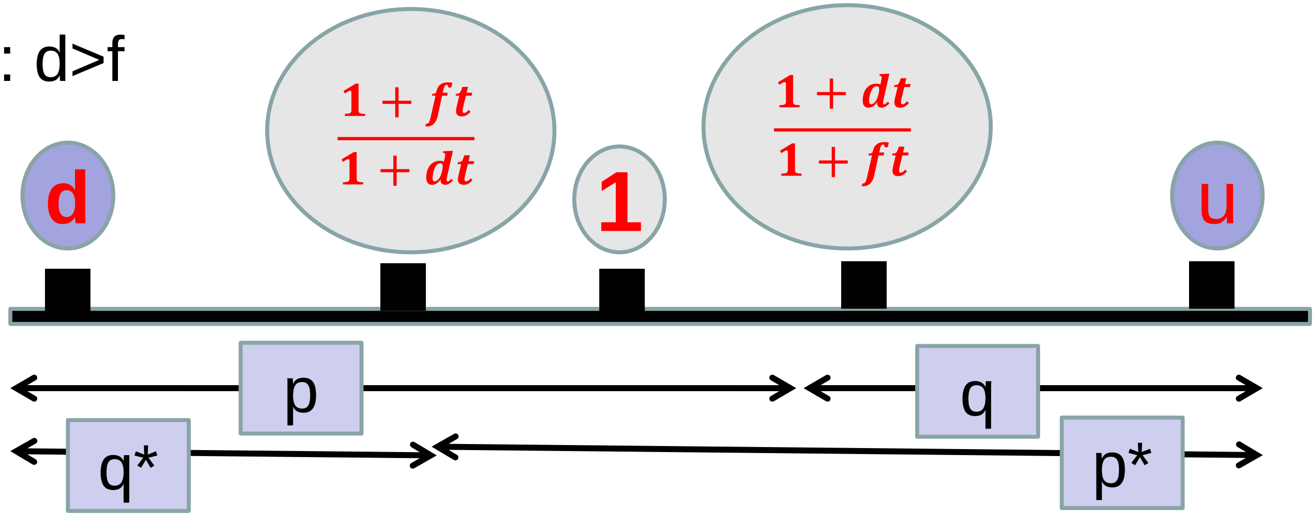
Report: d<f

$$p = \frac{u - \frac{1+dt}{1+ft}}{(u-d)} \qquad q = \frac{\frac{1+dt}{1+ft} - d}{(u-d)}$$

$$p^* = \frac{\frac{1+ft}{1+dt} - d}{(u-d)} \qquad q^* = \frac{u - \frac{1+ft}{1+dt}}{(u-d)}$$

Option FX

Déport: d>f



$$d < \frac{1+f.t}{1+d.t} < 1 < \frac{1+d.t}{1+f.t} < u$$

Report: d<f

$$d < \frac{1+d.t}{1+f.t} < 1 < \frac{1+f.t}{1+d.t} < u$$

Exercice 01 - correction

Calculer Δ et C, avec les données suivantes:

Marché : u=2, d=1/2, r=1/4, S_0=4

Instrument $\qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$p^* = \frac{\frac{1}{(1+rt)} - d}{(u-d)} = \frac{\frac{4}{5} - 1/2}{(2-1/2)} = \frac{2.3}{3.10} = \frac{1}{5}$$

$$q^* = \frac{u - \frac{1}{(1+rt)}}{(u-d)} = \frac{2 - \frac{4}{5}}{(2-1/2)} = \frac{2.6}{3.5} = \frac{4}{5}$$

Variation avec K

Incidence du prix d'exercice K pour un Call:

$$\Delta = \frac{V_1^+ - V_1^-}{S_1^+ - S_1^-} = \frac{\max(0, S_1^+ - K) - \max(0, S_1^- - K)}{(u-d).S_0}$$

Introduisons: $k = K/S_0$

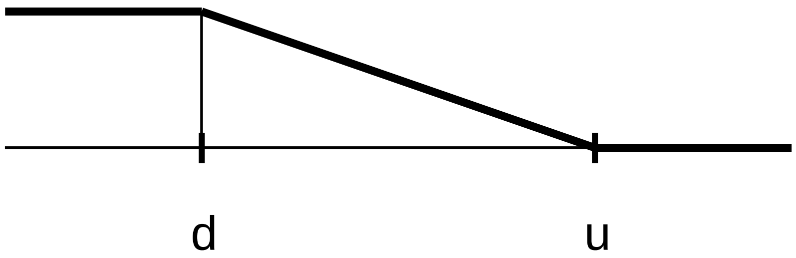
$$\Delta = \frac{\max(0, u-k) - \max(0, d-k)}{(u-d)}$$

Profil de la valeur Δ:

si $k > u > d$: $\Delta = 0$

si $u > k > d$: $\Delta = (u-k)/(u-d)$

si $u > d > k$: $\Delta = 1$



Exercice 03

Instrument: $S_0 = 100$ et $K = 105$

Marché : u=1.1 d=0,95 R=5%

Durée de la période: 6 mois = 0,5 an

Prendre r= 5%/2=2,5%

1 - Calculer : $\mathbf{V_1^-}$ et $\mathbf{V_1^+}$: pour un Call de pay off max(S-K,0)

2 - Calculer les probabilités risque neutre:

3 - Calculer les valeurs Δ et C

4 - Calculer la valeur du Call avec les probabilités RN

5 – Calculer ces valeurs avec les probabilité (p*,q*) et (p'q')

6 - Trouver le prix d'exercice K, afin d'obtenir un $\Delta = 0.75$

7 - Calculer la valeur du Put

Exercice 03 - correction

Instrument: S_0 = 100 et K = 105

Marché : u=1.1   d=0,95   R=5%

Durée de la période: 6 mois = 0,5 an

Prendre r= 5%/2 = 2.5%

1 - Calculer : $\mathbf{V_1^-}$ et $\mathbf{V_1^+}$ du Call

S1+=1,1.100 = 110,   S1-=0,95.100=95

V1+=max(110-105,0)=5 V1-=max(95-105,0)=0

2 - Calculer les probabilités risque neutre: p et q   p=0,5   q=0,5

3 - Recalculer les valeurs Δ et C: C=-30,89 Δ=0,3333

4 - Calculer la valeur du Call : $\mathbf{V_0}$: 2,4390

5 - Calculer V0 sous les probabilité (p*,q*) et (p'q') = (0,53;0,46) (1/3,2/3)

6 - Complément: trouver le prix d'exercice K, afin d'obtenir un Δ = 0.75: K=98,75

7 - Calculer la valeur du Put: 4,8780

Modèle Binomial - Calibration

Recherche de u et d en fonction de la volatilité de l'actif risqué: σ.

Modèle CRR: $u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$ $d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$

Modèle Jarrow Rudd , avec p=q=0.5

$$u = e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2}).\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{T/n}} \qquad d = e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2}).\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{T/n}}$$

Modèle Rendlemann Barter, avec p=q=0.5

$$u = e^{(\rho - \sigma^2).\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{T/n}} \qquad d = e^{(\rho - \sigma^2).\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{T/n}}$$

Taux Continu et CRR

Nouvelles expressions de (p,q) et (p*,q*)

$$p = \frac{e^{ct} - d}{u - d} = \frac{e^{ct} - e^{-\sigma\sqrt{t}}}{e^{\sigma\sqrt{t}} - e^{-\sigma\sqrt{t}}}$$

$$q = \frac{u - e^{ct}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{t}} - e^{ct}}{e^{\sigma\sqrt{t}} - e^{-\sigma\sqrt{t}}}$$

$$p^* = \frac{u - e^{-ct}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{t}} - e^{-ct}}{e^{\sigma\sqrt{t}} - e^{-\sigma\sqrt{t}}}$$

Calibration

Développement limité: $e^{x}=1+x+x^{2}/2$

$$p=\frac{\exp(rt)-\exp(-\sigma\sqrt{t})}{\exp(\sigma\sqrt{t})-\exp(-\sigma\sqrt{t})}=\frac{\left(1+rt+(rt)^{2}/2\right)-\left(1-\sigma\sqrt{t}+\frac{(\sigma\sqrt{t})^{2}}{2}\right)}{\left(1+\sigma\sqrt{t}+(\sigma\sqrt{t})^{2}/2\right)-\left(1-\sigma\sqrt{t}+(\sigma\sqrt{t})^{2}/2\right)}$$

$$p=\frac{rt+(\sigma\sqrt{t})+\frac{(rt)^{2}}{4}-\frac{(\sigma\sqrt{t})^{2}}{2}}{2(\sigma\sqrt{t})}\approx\frac{1}{2}+\frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}}-\frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$$q=\frac{\exp(\sigma\sqrt{t})-\exp(rt)}{\exp(\sigma\sqrt{t})-\exp(-\sigma\sqrt{t})}=\frac{-\left(1+rt+\frac{(rt)^{2}}{4}\right)+\left(1+\sigma\sqrt{t}+\frac{(\sigma\sqrt{t})^{2}}{2}\right)}{\left(1+\sigma\sqrt{t}+(\sigma\sqrt{t})^{2}/2\right)-\left(1-\sigma\sqrt{t}+(\sigma\sqrt{t})^{2}/2\right)}$$

$$q=\frac{-rt+(\sigma\sqrt{t})-\frac{(rt)^{2}}{4}+\frac{(\sigma\sqrt{t})^{2}}{2}}{2(\sigma\sqrt{t})}\approx\frac{1}{2}-\frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}}+\frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

Calibration

$$p* = \frac{-\exp(-rt)+\exp(\sigma\sqrt{t})}{\exp(\sigma\sqrt{t})-\exp(-\sigma\sqrt{t})} = \frac{-\left(1-rt-\frac{(rt)^2}{4}\right)+(1+\sigma\sqrt{t}+\frac{(\sigma\sqrt{t})^2}{2})}{(1+\sigma\sqrt{t}+(\sigma\sqrt{t})^2/2)-(1-\sigma\sqrt{t}+(\sigma\sqrt{t})^2/2)}$$

$$p* = \frac{rt+(\sigma\sqrt{t})+\frac{(rt)^2}{4}+\frac{\left(\sigma\sqrt{t}\right)^2}{2}}{2\left(\sigma\sqrt{t}\right)} \approx \frac{1}{2}+\frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}}+\frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$$q* = \frac{\exp(-rt)-\exp(-\sigma\sqrt{t})}{\exp(\sigma\sqrt{t})-\exp(-\sigma\sqrt{t})} = \frac{\left(1-rt+\frac{(rt)^2}{4}\right)-(1-\sigma\sqrt{t}+\frac{\left(\sigma\sqrt{t}\right)^2}{2})}{\left(1+\sigma\sqrt{t}+\left(\sigma\sqrt{t}\right)^2/2\right)-(1-\sigma\sqrt{t}\mp/2)}$$

$$q* = \frac{-rt+(\sigma\sqrt{t})+\frac{(rt)^2}{4}-\frac{\left(\sigma\sqrt{t}\right)^2}{2}}{2\left(\sigma\sqrt{t}\right)} \approx \frac{1}{2}-\frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}}-\frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

Calibration

$$p \approx \frac{1}{2} + \frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$$q \approx \frac{1}{2} - \frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$$p^* \approx \frac{1}{2} + \frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$$q^* \approx \frac{1}{2} - \frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$p < p^*$ et $q^* < q$

Modèle Binomial - Calibration

Résultats

$$p \approx \frac{1}{2} + \frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$$p^{*} \approx \frac{1}{2} + \frac{rt}{2\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{4}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$p * - p = \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}$$

$$d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{t}$$

Convergence des Modèles

Passage du discret au continu (BSM) dans le modèle de Jarrow & Rudd

$$K > S.u^j.d^{n-j} \qquad j > \frac{\ln(S/K) - n.\ln(d)}{\ln(u) - \ln(d)} \qquad j > \frac{\ln(S/K) - (\rho T - \sigma^2 T/2)}{2\sigma\sqrt{T/n}} + \frac{n}{2}$$

calcul de:

$$\frac{j - nq}{\sqrt{n.q.(q-1)}} \approx N(0,1) \qquad \frac{j - nq^*}{\sqrt{n.q^*.(q^*-1)}} \approx N(0,1)$$

avec les approximations:

$$\frac{j - nq}{\sqrt{n.q.(1-q)}} > d2 \qquad \frac{j - nq^*}{\sqrt{n.q^*.(1-q^*)}} > d1$$

Option de Change

Probabilités Risque Neutre, avec

- taux domestique: d%
- taux foreign: f%

Déport: d>f

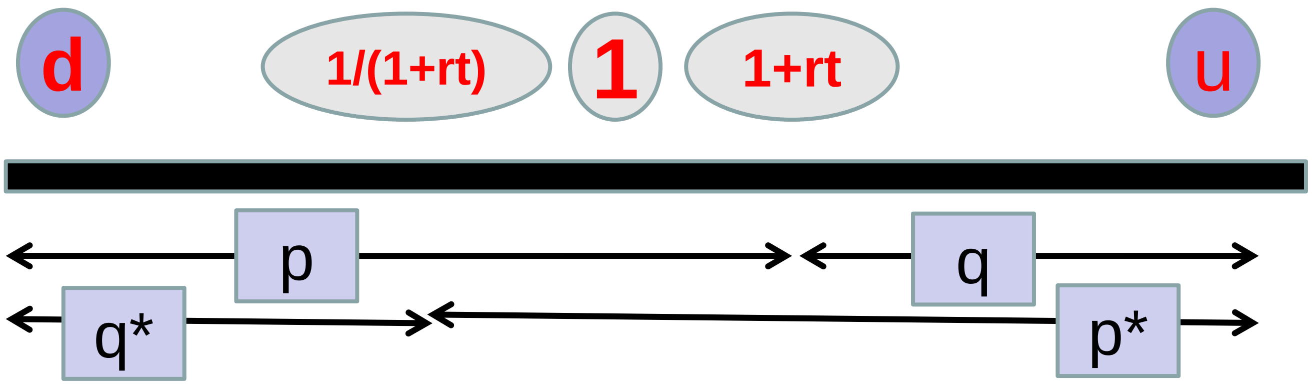
Report: d<f

$$p = \frac{u - \frac{1+dt}{1+ft}}{(u-d)} \qquad q = \frac{\frac{1+dt}{1+ft} - d}{(u-d)}$$

$$p^* = \frac{\frac{1+ft}{1+dt} - d}{(u-d)} \qquad q^* = \frac{u - \frac{1+ft}{1+dt}}{(u-d)}$$

Théorie Arbitrage

Déport: d>f



$$d < \frac{1+f.t}{1+r.t} < 1 < \frac{1+d.t}{1+f.t} < u$$

Report: d<f

$$d < \frac{1+d.t}{1+f.t} < 1 < \frac{1+f.t}{1+d.t} < u$$

Convergence des Modèles

Passage du discret au continu (BSM) dans le modèle de Jarrow & Rudd

$$K > S.u^{j}.d^{n-j} \qquad j > \frac{\ln(S/K) - n.\ln(d)}{\ln(u) - \ln(d)} \qquad j > \frac{\ln(S/K) - (\rho T - \sigma^2 T/2)}{2\sigma\sqrt{T/n}} + \frac{n}{2}$$

calcul de:

$$\frac{j - nq}{\sqrt{n.q.(q-1)}} \approx N(0,1) \qquad \frac{j - nq^*}{\sqrt{n.q^*.(q^*-1)}} \approx N(0,1)$$

avec les approximations:

$$\frac{j - nq}{\sqrt{n.q.(1-q)}} > d2 \qquad \frac{j - nq^*}{\sqrt{n.q^*.(1-q^*)}} > d1$$

4 – Théorie de l'Arbitrage

FINKEYS FRANCE

Théorie de l'Arbitrage

OBJECTIFS

- Valider la zone de prix actuels admissibles
- Calculer le taux sans risque
- Calculer les probabilités « risque neutre »

DONNEES

- Les prix futurs de chaque actif dans chaque scénario futur

CONTRAINTES

- Vérification de l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA)
- Choisir un taux d'intérêt sans risque (TSR)

DONNEES

- n Actifs
- n Etats futurs

Le problème exige égalité entre le nombre d'actifs et le nombre d'états futurs.

Soit, le nombre de données suivant:

- n x n valeurs futures
- et n valeurs actuelles à valider

Total de n x (n+1) données

Si n = 2 : 6 données: 4 valeurs futures et 2 valeurs actuelles

Si n = 3 : 12 données: 9 valeurs futures et 3 valeurs actuelles

Si n = 4 : 20 données: 16 valeurs futures et 4valeurs actuelles

Finance à 2 actifs

DONNEES DE MARCHE:

n=2 actifs et 2 états futurs h(haut) et b(bas)

2 prix actuels (px1,px2) et 4 prix futurs

	Actif 1	Actif 2
Prix Actuel	60	85
Prix Futur Etat h	90	150
Prix Futur Etat b	55	60

Question: les 2 Prix Actuels de px1=60 et px2=85 sont-ils valides?

Présentation du problème avec N=2

Soit x et y les composantes du portefeuille

Soit V la valeur du portefeuille actuel (prix à l'achat/vente)

Soit Vb et Vh les valeurs du portefeuille dans chaque scénario futur

Equations:

$$V = px1.x + px2.y = 60\,x + 85\,y$$

$$Vh = 90\,x + 150\,y$$

$$Vb = 55\,x + 60\,y$$

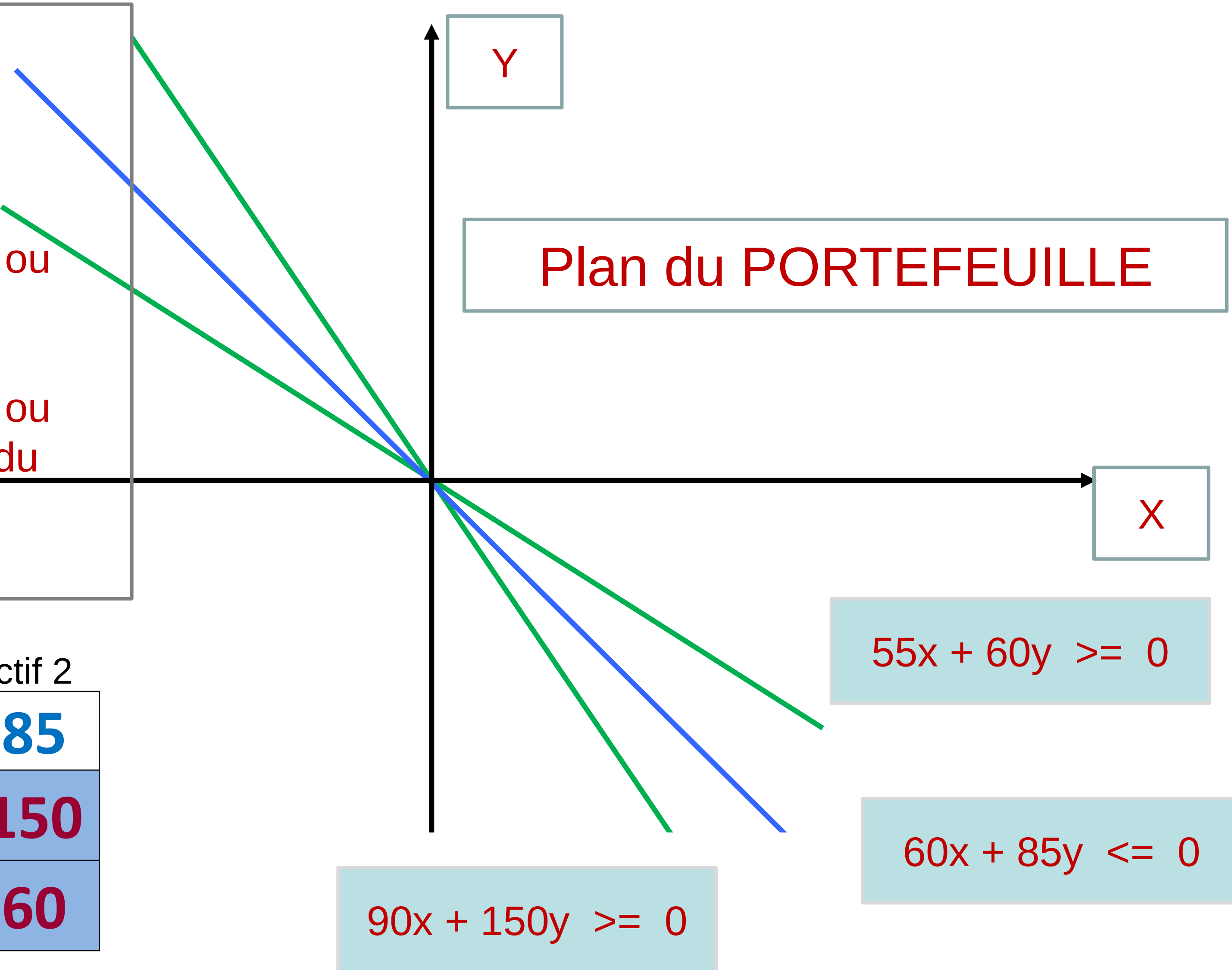
2 représentations graphiques:

Dans le plan du portefeuille PTF (x,y) – avec composantes positives ou négatives

Dans le plan des PRIX (px1,px2) – avec prix positifs

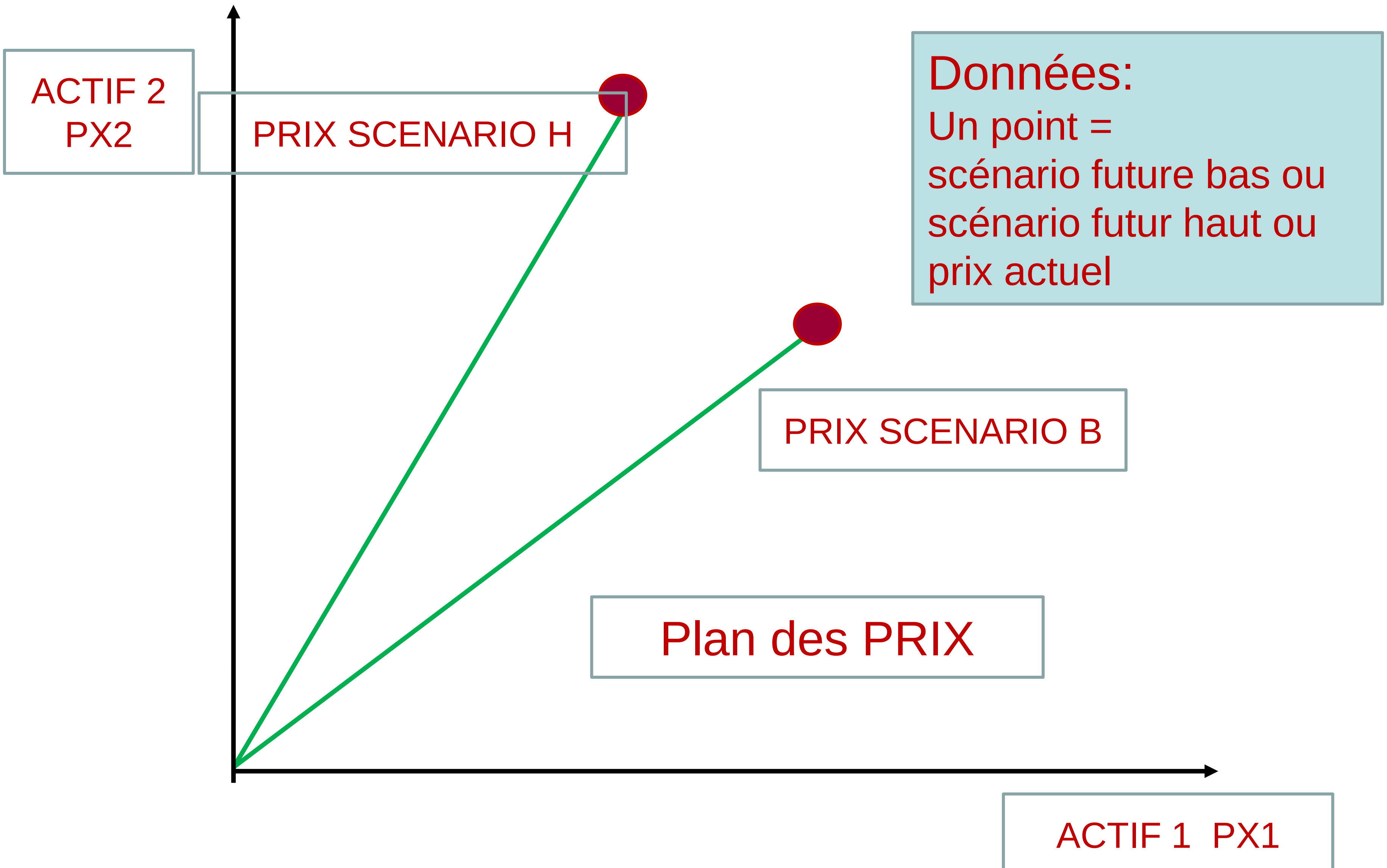
Plan PTF – Graphique 2D

Données:
Une droite =
Valeur future en scénario haut du portefeuille nulle ou
Valeur future en scénario bas du portefeuille nulle ou
Valeur présente du portefeuille nulle



	Actif 1	Actif 2
Prix Actuel	60	85
Prix Futur Etat h	90	150
Prix Futur Etat b	55	60

Plan PRIX – Graphique 2D



Portefeuilles Tests

CALCULS PRÉLIMINAIRES:

Soit les 2 portefeuilles suivants:

	port A	port B
actif 1	**50**	**20**
actif 2	**20**	**10**

Déterminer la valeur actuelle de chaque portefeuille

Déterminer les valeurs futures de chaque portefeuille dans chacun des 2 états

- Marché:

$$M = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$$

Portefeuilles Tests - solutions

	port A	port B	port A+B
actif 1	**50**	**20**	70
actif 2	**20**	**10**	30
Prix actuel	4700,00	2050,00	6750,00
Etat U	7500,00	3300,00	10800,00
Etat D	3950,00	1700,00	5650,00

$$50.60 + 20.\ \ 85 \quad = 4700$$
$$50.90 + 20.150 \quad = 7500$$
$$50.55 + 20.60 \quad\quad = 3950$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 3950 \end{pmatrix}$$

Portefeuille test - Calcul Matriciel

MATRICE DE MARCHE : M

Ligne: états

Colonne: actifs

$$M = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$$

Portefeuilles Tests

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 3950 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3300 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

	port A	port B	port A+B
actif 1	**50**	**20**	70
actif 2	**20**	**10**	30
Prix actuel	4700,00	2050,00	6750,00
Etat 1	7500,00	3300,00	10800,00
Etat 2	3950,00	1700,00	5650,00

AOA - Non Arbitrage

AOA : Absence d'Opportunité d'Arbitrage

Conditions d'arbitrage équivalent à un gain positif quelque soit les états futurs, ou une perte quelque soit les états futurs.

On exclut les cas futurs où les n portefeuilles futurs ont tous des valeurs positives ou tous des valeurs négatives.

Graphiquement, on exclut les zones suivantes:

90 x + 150 y >= 0 (état H) intersection 55 x + 60 y >= 0 (état B)

Union

90 x + 150 y <= 0 (état H) intersection 55 x + 60 y <= 0 (état B)

Ce qui donne graphiquement 2 zones:

AOA - Non Arbitrage N=2

La zone acceptable AOA est uniquement la zone entre les deux droites

$90 x + 150 y >= 0$ et $55 x + 60 y <= 0$

union

$90 x + 150 y <= 0$ et $55 x + 60 y >= 0$

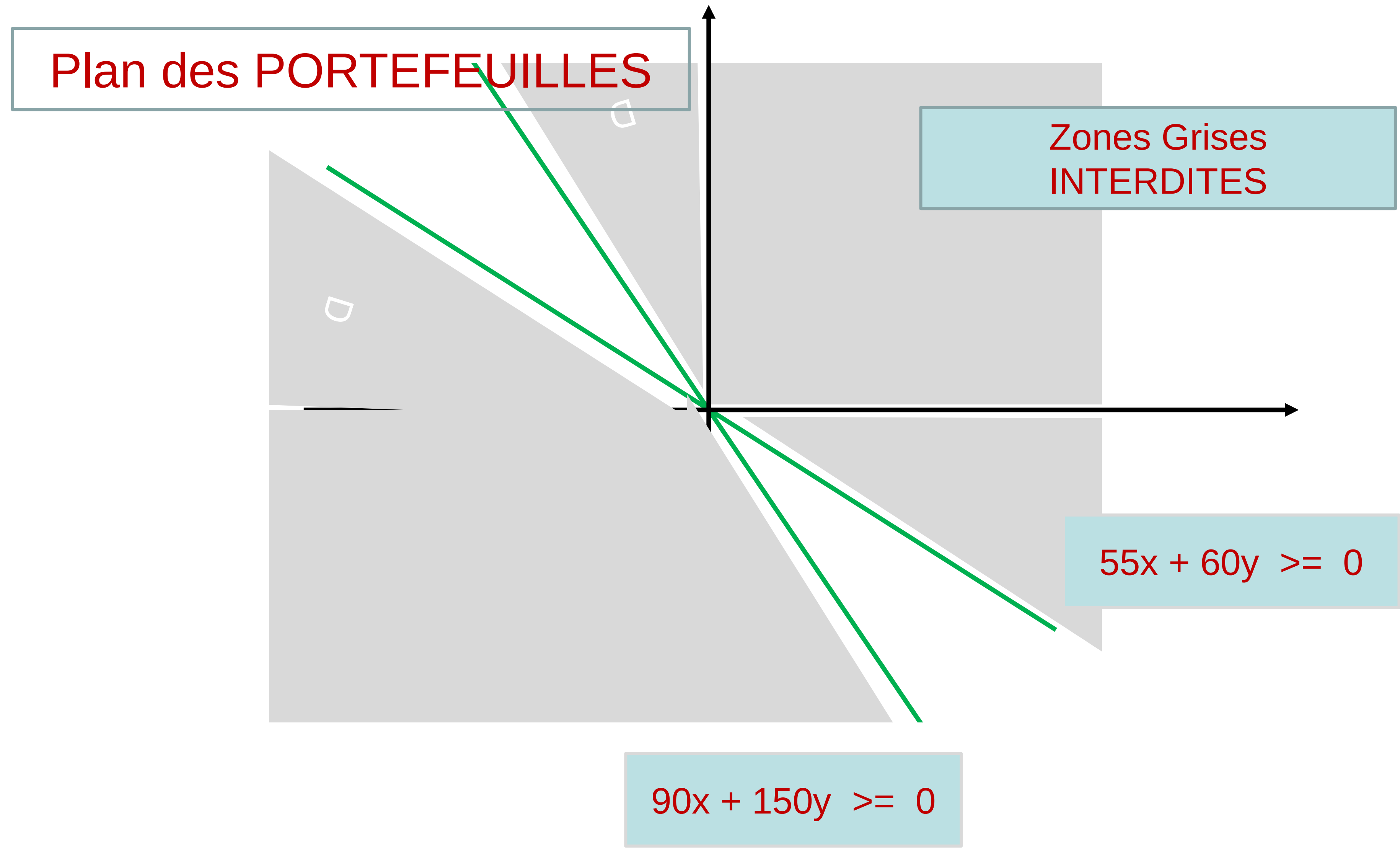
Interprétation à partir des pentes:

La pente de la droite des prix actuels doit être comprise entre les pentes des droites des états H et B.

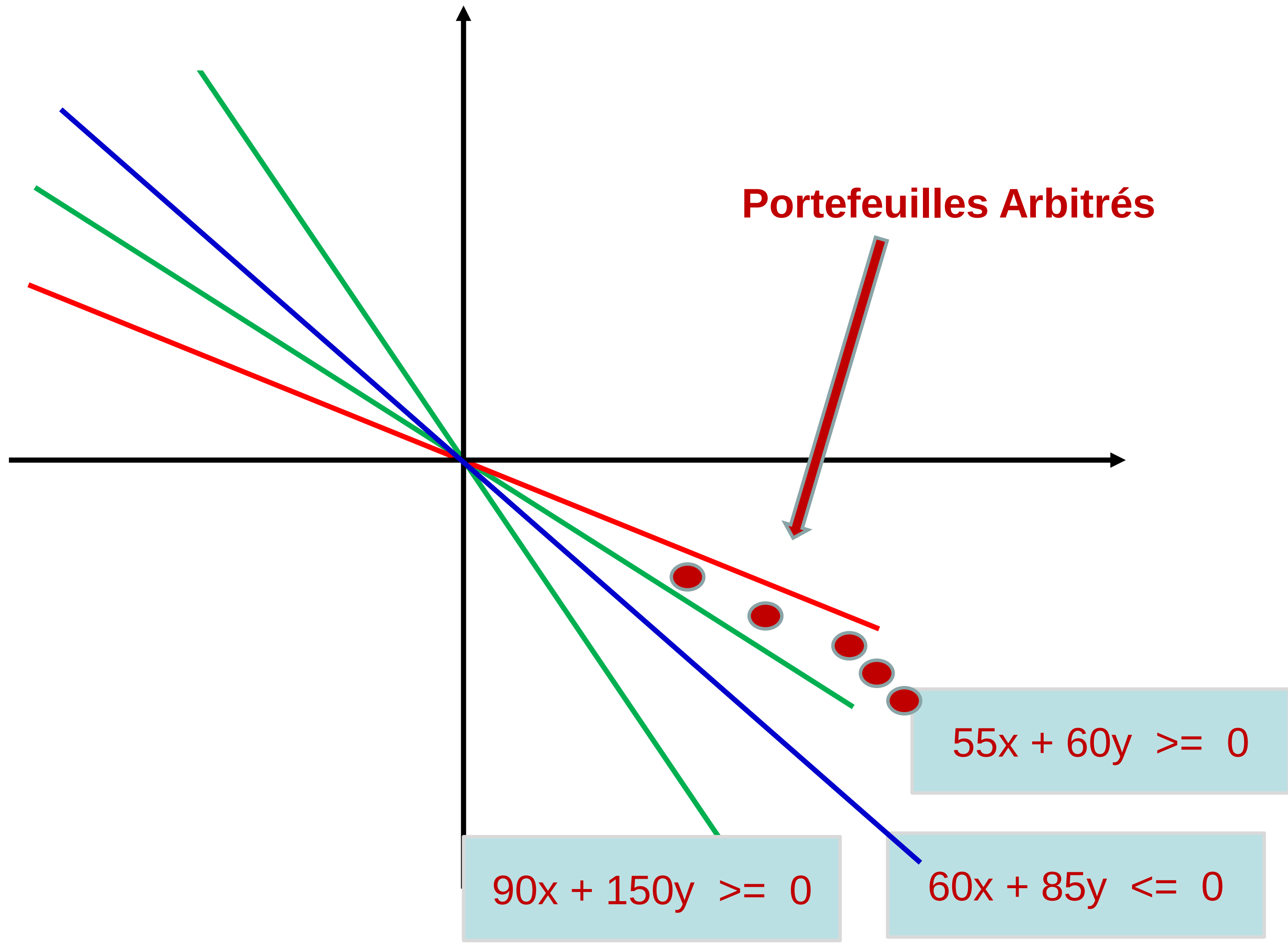
Etat Haut:	$90 x + 150 y$	pente -1,6667
Etat Bas:	$55 x + 60 y$	pente -1,0909
Droite Prix actuels:	$60 x + 85 y$	pente -1,4167

Ces prix sont valides car $1{,}0909 < 1{,}4167 < 1{,}6667$

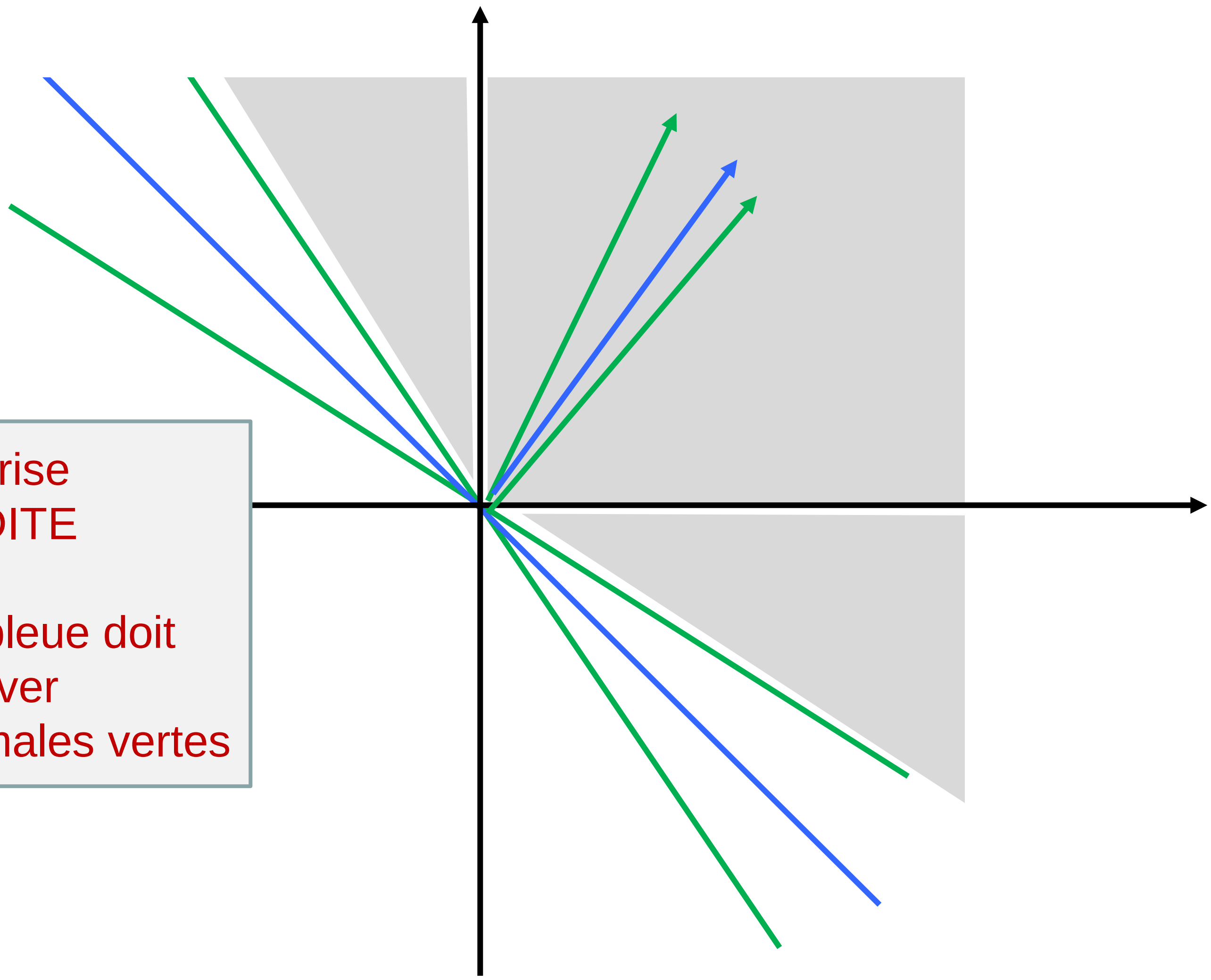
Non Arbitrage – Graphique 2D



Arbitrage – Graphique 2D



Non Arbitrage – Graphique 2D



Zone Grise
INTERDITE

La normale bleue doit
se trouver
entre les 2 normales vertes

Théorie de l'Arbitrage– Arrow-Debreu

DEFINITIONS

Un portefeuille Arrow-Debreu (ptf AD), est un portefeuille qui rapporte 1 dans un état futur et 0 dans tous les autres états.

DONNEES

Dans notre cas, il existe n portefeuilles Arrow-Debreu

Chacun de ces portefeuilles possède un prix actuel

MOYEN

Ces portefeuilles sont obtenus en inversant la matrice de marché

Finance à 2 actifs – Arrow-Debreu

CALCUL DES PORTEFEUILLES ARROW-DEBREU

1. Déterminer le portefeuille X qui rapporte 1 dans l'état 1 et 0 dans l'état 2
2. Déterminer le portefeuille Y qui rapporter 0 dans l'état 1 et 1 dans l'état 2
3. Déterminer le portefeuille Z qui rapporte 1 dans l'état 1 et 1 dans l'état 2
4. Décomposer les portefeuilles

   A et B avec les portefeuilles

   X et Y

	Actif 1	Actif 2
Prix Actuel	60	85
Prix Futur Etat HAUT	90	150
Prix Futur Etat BAS	55	60

Ptf Arrow-Debreu – matrice

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.0211 & 0.0526 \\ 0.0193 & -0.0316 \end{pmatrix}$$

matrice inverse	Port X	Port Y	port X+Y
actif 1	-0,0211	0,0526	0,0316
actif 2	0,0193	-0,0316	-0,0123
	px	py	px+py
prix	**0,3772**	**0,4737**	**0,8509**
Etat 1	1,00	0,00	1,00
Etat 2	0,00	1,00	1,00

Finance – matrice

$$\begin{pmatrix} 7500 & 3950 \\ 3300 & 1700 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,3772 \\ 0,4737 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4700 \\ 2050 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 60 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3772 \\ 0,4737 \end{pmatrix}$$

matrice inverse	Port X	Port Y	port X+Y
actif 1	-0,0211	0,0526	0,0316
actif 2	0,0193	-0,0316	-0,0123
	px	py	px+py
Prix Actuel	**0,3772**	**0,4737**	**0,8509**
Prix Futur Etat U	1,00	0,00	1,00
Prix Futur Etat D	0,00	1,00	1,00

Théorie de l'Arbitrage– taux sans risque (TSR)

OBJECTIFS

A partir des portefeuilles Arrow-Debreu, obtenir le taux sans risque de passage de la période présente à la période future

MOYEN

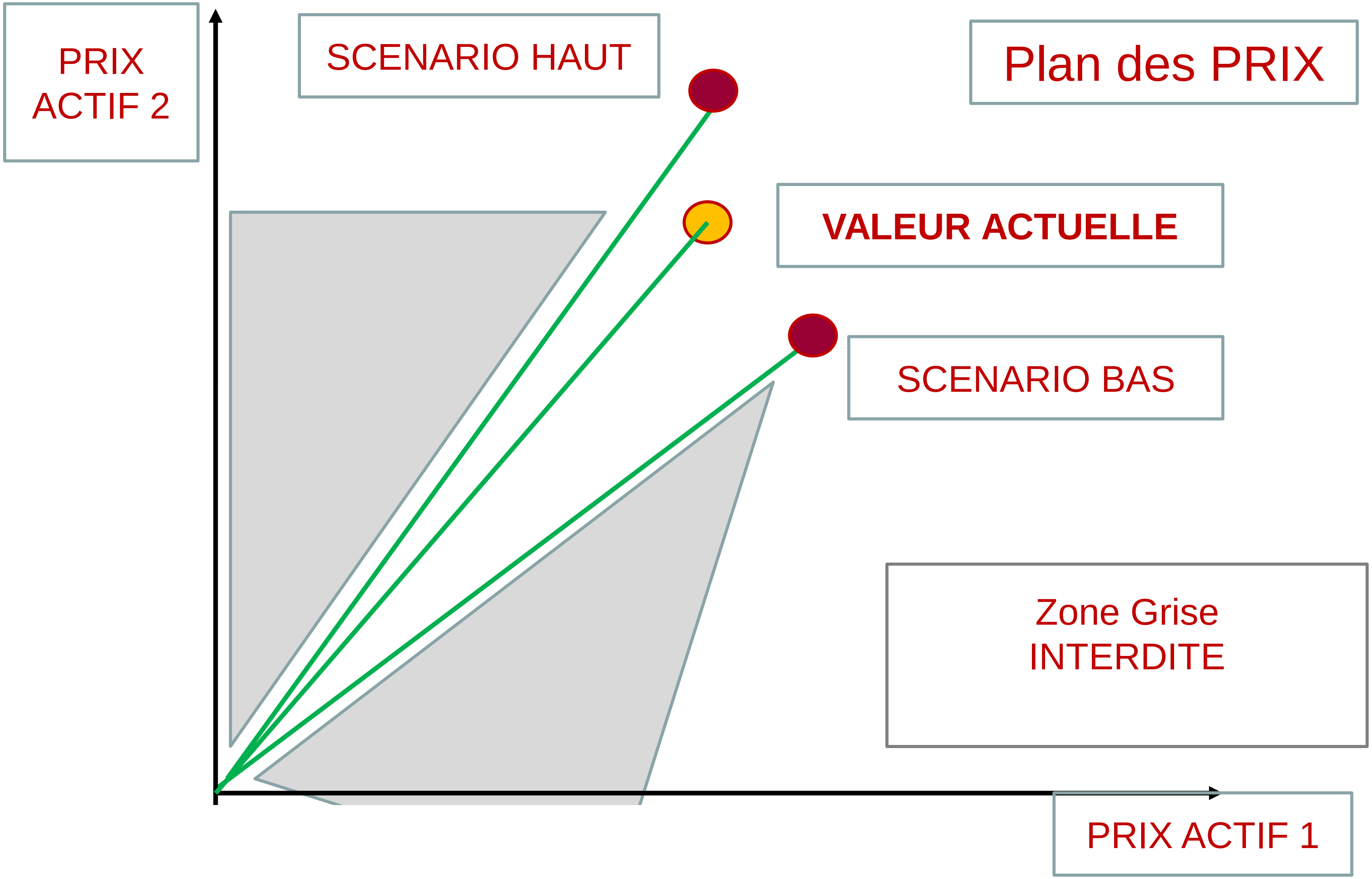
La somme des portefeuilles Arrow-Debreu, possède un pay-off de 1 dans tous les cas futurs.

Ce portefeuille est totalement déterministe

Sa valeur présente est égale à la somme des n portefeuilles Arrow-Debreu : S

Le taux sans risque est égal à : TSR = 1/S-1, avec une période égale à l'unité.

Prix Futurs – Graphique 2D



Théorie de l'Arbitrage– taux sans risque (TSR)

Portefeuilles Arrow-Debreu

X = (-0,0211 ; 0,0193)   valeur = 0,3772

Y = (0,0526 ; -0,0123)   valeur = 0,4737

Portefeuille X+Y = (0,315 ; 0,0070) valeur = 0,8509

Ce portefeuille valant 0,8509, vaudra =1

Donc 0,8509 (1 + TSR) = 1

TSR = 17,53%

matrice inverse	Port X	Port Y	port X+Y
actif 1	-0,0211	0,0526	0,0316
actif 2	0,0193	-0,0316	-0,0123

Théorie de l'Arbitrage– taux sans risque (TSR)

OBJECTIFS

Identifier la zone acceptable des prix actuels.

Chaque solution de prix actuels, génère un taux sans risque

Identifier la zone pour laquelle le taux sans risque est nul

MOYEN

Inversons la méthode de calcul précédente: à partir des valeurs des portefeuilles AD, obtenons les prix actuels

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3772 \\ 0{,}4737 \end{pmatrix}$$

Prix Actuels = M x valeurs ptf AD

Théorie de l'Arbitrage – taux sans risque

RESULTAT $\begin{pmatrix} 60 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3772 \\ 0,4737 \end{pmatrix}$

Calculons les prix actuels avec les portefeuilles AD (1,0) et (0,1), dont la somme des valeurs est égale à 1 et qui représentent donc un TSR nul

Avec (1,0), prix actuels = (90 ; 55)

Avec (0,1), prix actuels = (155 ; 60)

CONCLUSION

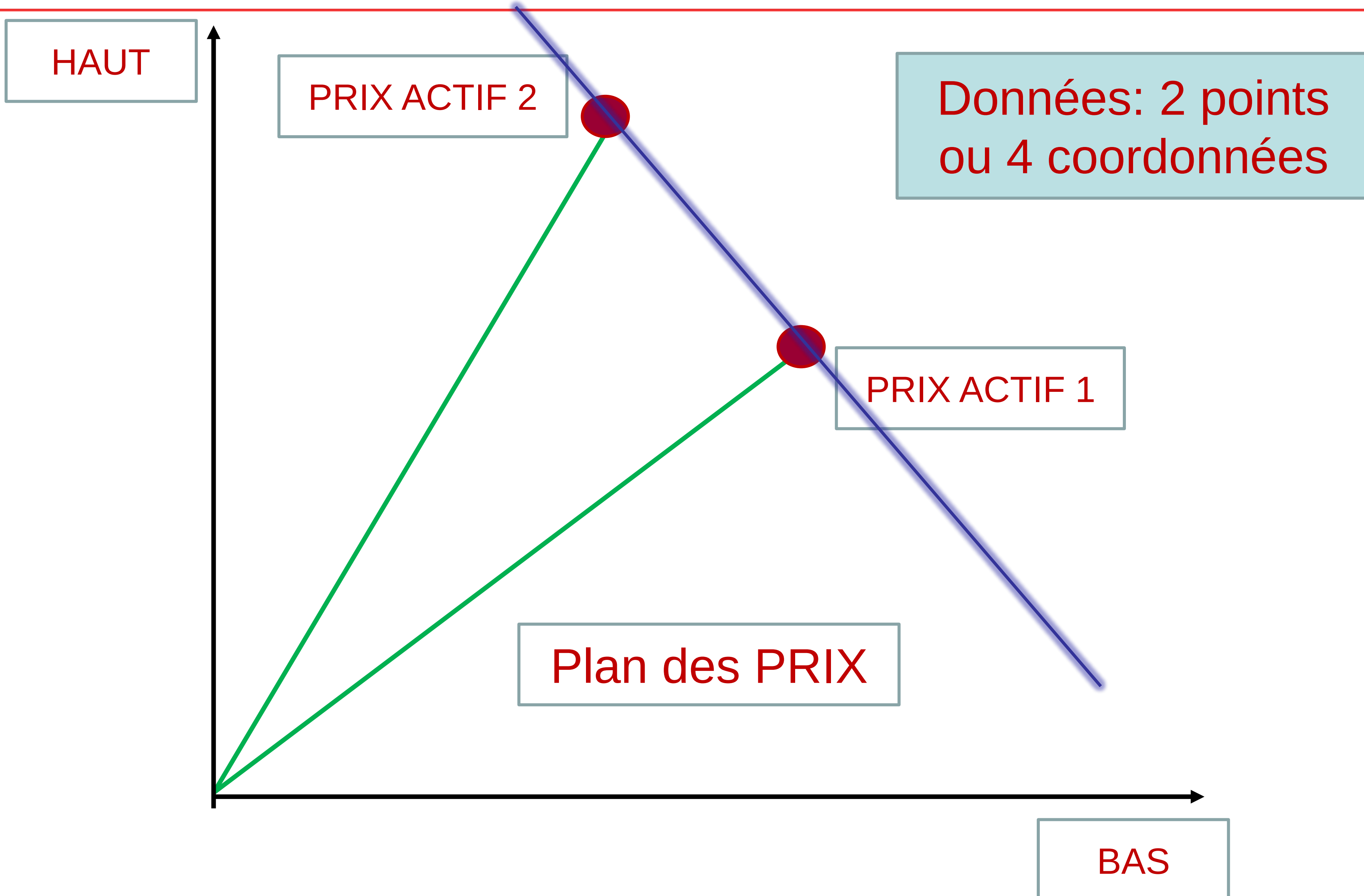
Les deux points X et Y, en tant que prix actuels, ont un taux sans risque nul.

CORROLAIRES

La droite de TSR nul est la droite passant par X et Y

Les droites de TSR constant sont parallèles à cette droite

Prix Futurs – Graphique 2D



Valorisation 2D

PRIX

px = 0,3772 py = 0,4737

Somme = px+py = 0,8509

VALORISATION du portefeuille (x y) = x px + y py

Taux sans risque:TSR = (1 /(px+py)) – 1 = 17,53%

Probabilités Risques Neutres:

qx = px (1+TSR) = 0,44

qy = py (1+TSR) = 0,56

Avec qx+qy = 1 - > probabilités

VALORISATIONS FUTURES **:**

qx . x + qy . y = 0,44 . x + 0,56 . y

Finance à 3 actifs

	état 1	état 2	état 3	PRIX
actif 1	50	60	80	60
actif 2	90	110	130	105
actif 3	110	110	110	100

Finance – matrice

matrice inverse	Port X	Port Y	Port Y	port X+Y+Z
actif 1	0,10	-0,20	0,10	0,00
actif 2	-0,10	0,15	-0,05	0,00
actif 3	0,05	-0,03	0,00	0,01
	px	py	pz	px+py+pz
prix	**0,05**	**0,57**	**0,30**	**0,91**
Etat 1	1,00	0,00	0,00	1,00
Etat 2	0,00	1,00	0,00	1,00
Etat 3	0,00	0,00	1,00	1,00

$$\begin{pmatrix} 60 & 60 & 80 \\ 90 & 110 & 130 \\ 110 & 110 & 110 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 60 \\ 105 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.57 \\ 0.30 \end{pmatrix}$$

Non Arbitrage

AOA : Absence d'Opportunité d'Arbitrage:

Portefeuille (x,y,z)

Conditions:

cout: $60\,x + 105\,y + 100\,z <= 0$

Etat 1: $50\,x + 90\,y + 110\,z >= 0$

Etat 2: $60\,x + 110\,y + 110\,z >= 0$

Etat 3: $80\,x + 130\,y + 110\,z >= 0$

Arbitrage, si portefeuille non nul, respectant les 4 conditions

-> l'achat du portefeuille est négatif (on reçoit de l'argent), et dans tous les cas de figure (3 états), le pay-off est toujours positif.

Par conséquent, une des inégalités devient une inégalité stricte

Non Arbitrage – Graphique 3D

Graphique en trois dimensions

Les inégalités définissent des plans passant par le centre

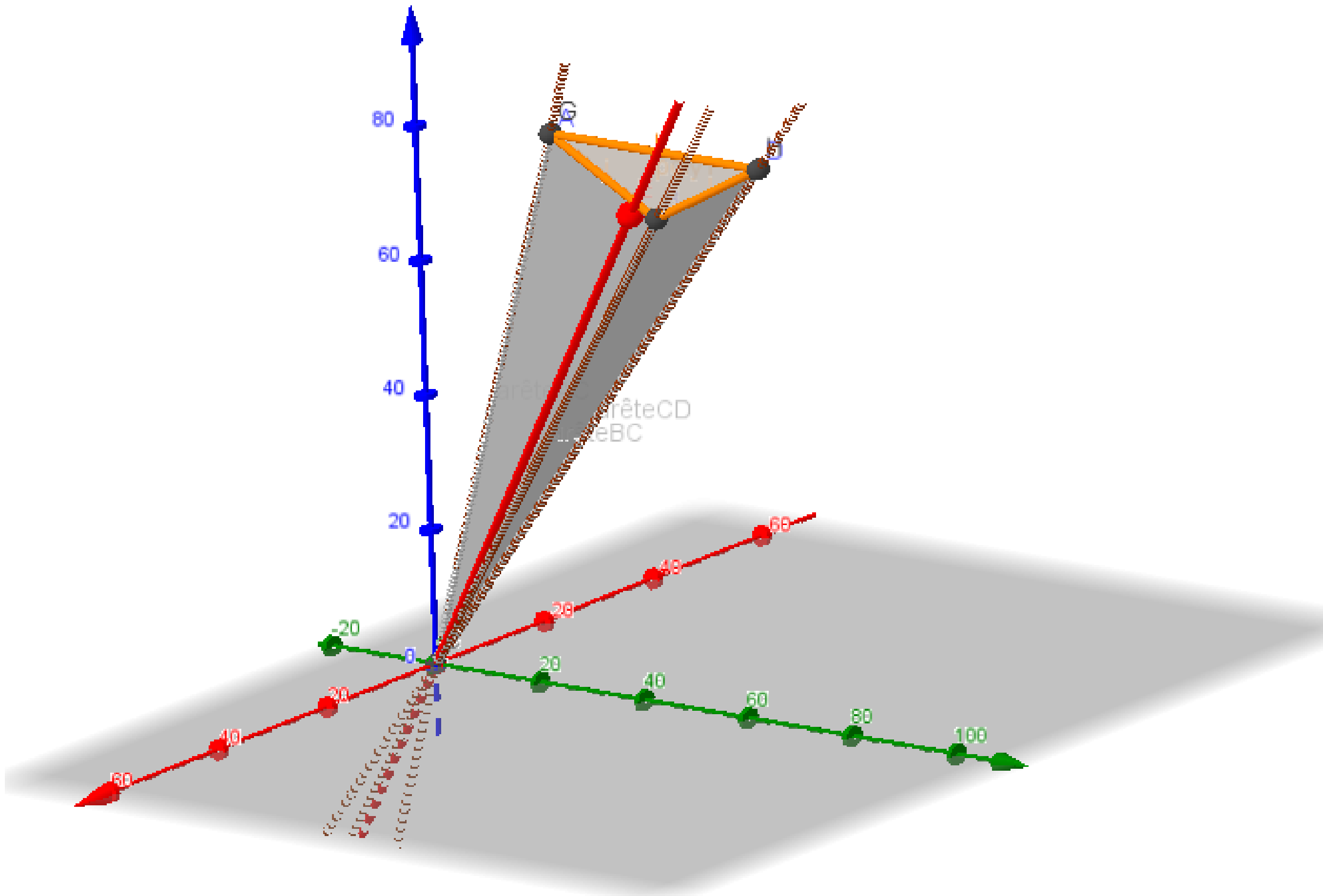
Chaque plan, possède une droite normale (perpendiculaire) passant par le centre

Les trois normales définissent un cône de forme pyramidale

L'inégalité du prix définit aussi un plan et une normale

La condition de non arbitrage implique que la normale du prix soit comprise à l'intérieur du cone.

Non Arbitrage – Graphique 3D



Valorisation

PRIX

$Px=0,0455=1/22$ $Py=0,5682=25/44$ $Pz=0,2955=13/44$

Somme = $Px + Py + Pz = 40/44 = 0,909090$

VALORISATION du portefeuille (x y z) = $x\, Px + y\, Py + z\, Pz$

Taux sans risque: $TSR = (1 /(Px+Py+Pz)) – 1 = 10\ \%$

Probabilités Risques Neutres:

$Qx = Px * (1+TSR) = 0,050$

$Qy = Py * (1+TSR) = 0,625$

$Qz = Pz * (1+TSR) = 0,325$

Avec $Qx+Qy+Qz = 1$ - > probabilités

VALORISATIONS FUTURES : $x\, Qx + y\, Qy + z\, Qz$

5 – Théorie de l'Arbitrage Appliquée aux options

FINKEYS FRANCE

Lien avec Théorie de la Finance

Valeurs Futures:

Actif sans risque: 1,25 dans les 2 scénarios

Actif risqué: S.u et S.d

Matrice de Marché:

$$M = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 2 \\ 1{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Inversion de la matrice de Marché:

$$1/M = \begin{pmatrix} -0{,}266 & 1{,}06 \\ 0{,}66 & -0{,}66 \end{pmatrix}$$

Valeur Actuelle V:

Somme de la première colonne de 1/M = -0,26+0,66 = 0,4

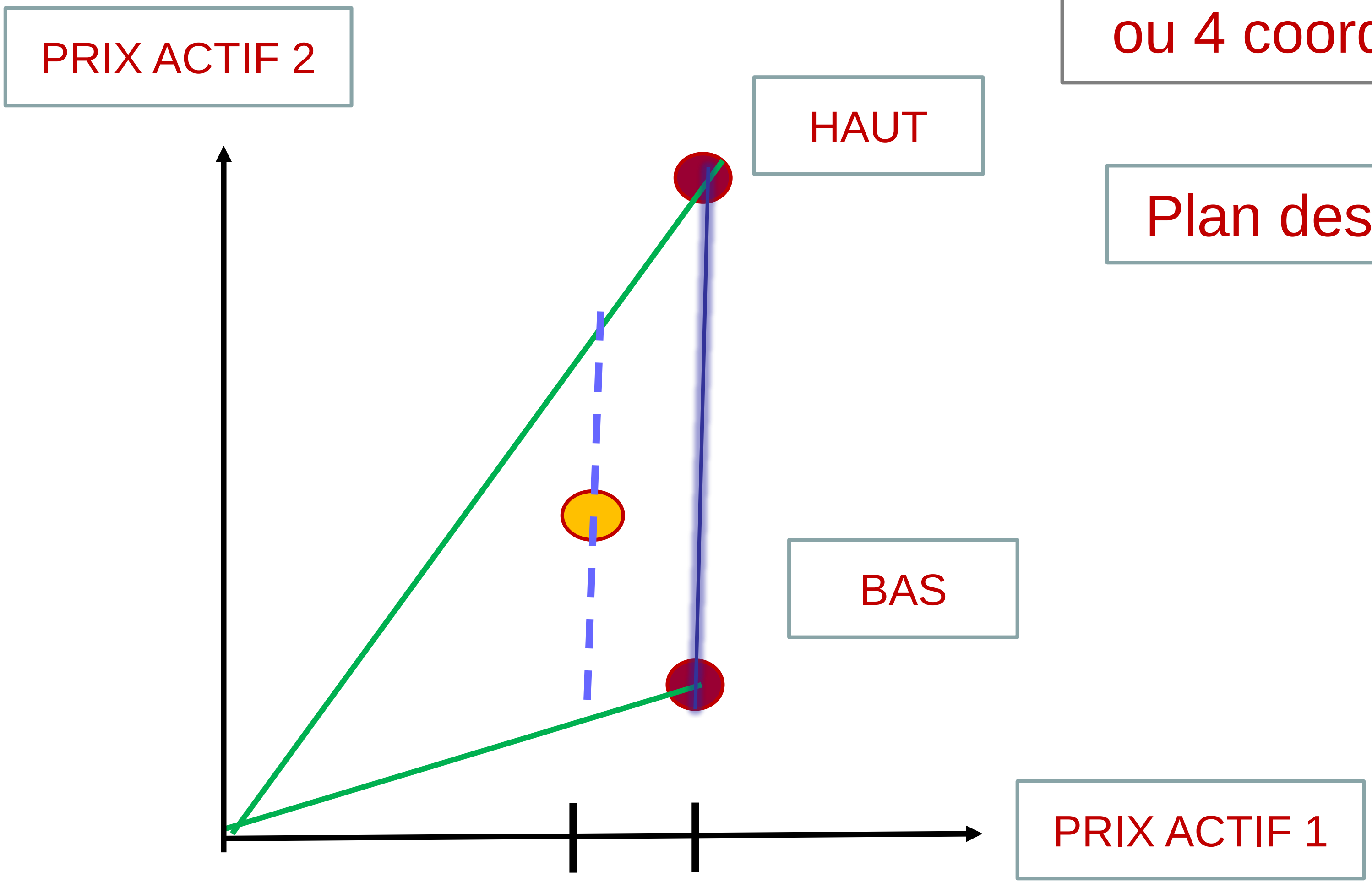
Exercice 01 - correction

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad q = \frac{u-(1+r)}{u-d} \qquad V_0 = \frac{1}{1+0,25}(0,5.1+0,5.0) = 0,4$$

$$p = \frac{(1+0,25)-0,5}{2-0,5} = 0,5 \qquad q = \frac{2-(1+0,25)}{2-0,5} = 0,5$$

	actif 1	actif 2	pente	CONDITION AOA
état 1	1,25	8		VRAI
état 2	1,25	2	-1,60	VRAI
PRIX	1	4	-4,00	**NOARB**
prix TSR	0,4000	0,4000	0,80	25,00%
pRN	0,5000	0,5000	1,00	
	-0,2667	1,0667		
	0,1667	-0,1667		

Prix Futurs – Graphique 2D



Données: 2 points ou 4 coordonnées

Plan des PRIX

6 – Modèle Binomial

FINKEYS FRANCE

Modèle Binomial

Discrétisation de la durée: découpage de la durée en n périodes

Mise en œuvre d'un arbre binomial pour

- Les prix futurs
- Les probabilités (ou comptage de chemins)

On obtient ainsi une simulation numérique.

Arbre des Prix Futurs

Durée totale T découpée en n périodes, pas t = T/n

Les prix se construisent à partir de : S, u et d.

Modèle de l'actif sans risque: passage de 1 à $(1+r)^n$

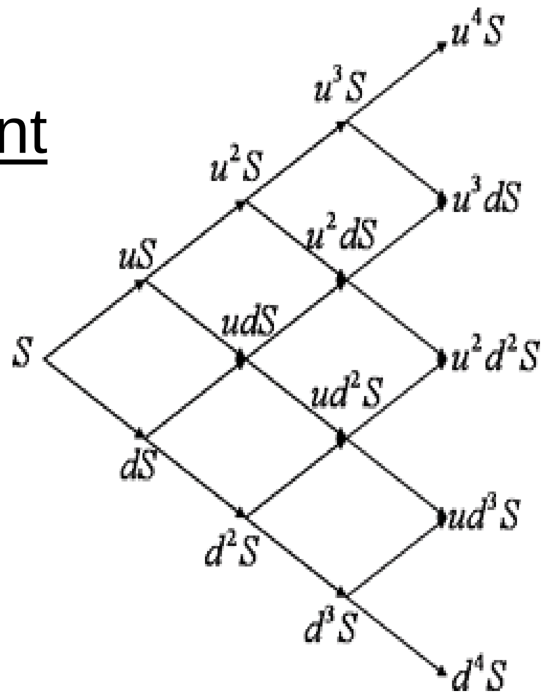
Modèle de l'actif risqué: arbre <u>recombinant</u>

Valeur initiale: S

Valeurs finales:

$$S_i = S.u^i.d^{n-i}$$

n périodes, n+1 états finaux, 2^n chemins



Arbre des Probabilités

L'arbre des probabilités se construit à partir des probabilités RN : p et q

Chemin « up » avec probabilité: p

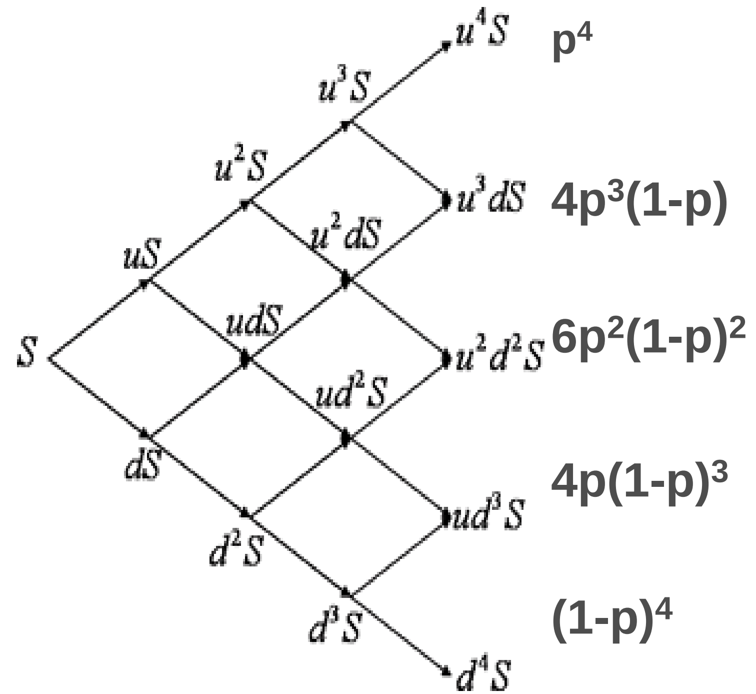
Chemin « down » avec probabilité: q

Probabilité de la valeur maximale: p^n

Probabilité de la valeur minimale: q^n

Probabilité intermédiaire au noeud i

$$P_i = \binom{n}{i} p^i . q^{n-i}$$



Somme des probabilités finales:

(loi binomiale)

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i} = 1$$

Passage au logarithme

Identification des indices allant de 0 à n

$$S_i = S.u^i.d^{n-i}$$

$$\ln(S_i) = \ln(S) + i.\ln(u) + (n-i).\ln(d)$$

$$\ln(S_i / S) = n.\ln(d) + i.\ln(u/d)$$

$$i = \frac{\ln(Si/(S.d^n))}{[\ln(u/d)]}$$

Equidistance des intervalles entre les états adjacents

Ecart égal à ln(u) – ln(d) = ln(u/d)

Valeur maxi: S.n.ln(u)

Valeur mini : S.n.ln(d)

Bornes Arbre Binomial

Option CALL européenne: pay-off = (S>K).(S-K)

Option PUT européenne: pay-off = (S<K).(K-S)

Le call revient à prendre la partie supérieure de l'arbre binomial

Le put revient à prendre la partie inférieure de l'arbre binomial

Calcul de l'indice w, à partir duquel la sommation est effectuée

Cet indice w, correspond à la valeur du prix d'exercice K

$$w = \frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right) - n.\ln(d)}{\ln(u/d)} = \frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right) + n.\ln(u)}{2.\ln(u)}$$

Wc= arrondi.sup(w)

Wp=arrondi.inf(w)

wp+wc=n-1

Fonctions Excel

Loi de probabilité discrète:

$$B(n,p,wp,wc) = \sum_{i=wp}^{wc} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

LOI.BINOMIALE.SERIE(n,p,wp,wc)

Loi de probabilité continue:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2} dx$$

LOI.NORMALE.STANDARD(d)

Relations de complémentarité:

BIN(n,p,0,w) = BIN(n,q,0,n-w)

BIN(n,p,0,w) + BIN(n,q,0,n-w-1) = 1

CND(d) + CND(-d) = 1

Code VBA – Binomial

```
Function Binomial (PC, S, K, R, T, Vol, n)

Dim dt As Double, taux As Double, bin As Double, p As Double
Dim wc As Integer, i As Integer
dt = T / n
taux = (1 + R) ^ dt
DF = (1 + R) ^ (-T)
u = Exp(Vol * Sqr(dt))
d = 1 / u
p = (taux - d) / (u - d)
bin = 0
wc = Ceiling(Log(K / S / d ^ n) / Log(u / d), 1)
If CP = 1 then
  For i = wc To n
    bin = bin+COMB(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i)*(S*u^i*d^(n-i)-K)
  Next i
Else
  For i = 0 To (wc - 1)
    bin = bin+COMB(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i)*(K-S*u^i*d^(n-i))
  Next i
EndIf
Binomial = bin / (1 + taux) ^ n
End Function
```

Code VBA – Binomial CRR

```
Function BinomialCRR(CP, S, K, T, R, Vol, n)
Dim dt As Double, taux As Double, bin As Double, p As Double, pp As Double
Dim wp As Integer
Dim u As Double, d As Double, DF As Double
dt = T / n
taux = (1 + R) ^ dt
DF = (1 + R) ^ (-T)
u = Exp(Vol * Sqr(dt))
d = 1 / u
p = (taux - d) / (u - d)
pp = u * p / taux
bin = 0
wp=Application.WorksheetFunction.Floor(Abs(Log(K / S / d ^ n) / Log(u / d)), 1)
If CP = 1 then
    bin = bino(n, pp, wp + 1, n) * S - bino(n, p, wp + 1, n) * K * DF
else
    bin = -bino(n, pp, 0, wp) * S + bino(n, p, 0, wp) * K * DF
EndIf
BinomialCRR = bin
End Function

Function bino(n, p, wp, wc)
    bino = Application.WorksheetFunction.Binom_Dist_Range(n, p, wp, wc)
End Function
```

Code VBA – Binomial COR

```
Function BinomialCOR(CP, S, K, T, R, Vol, n)
Dim dt As Double, taux As Double, bin As Double, p As Double, pp As Double
Dim wp As Integer
Dim u As Double, d As Double, DF As Double
dt = T / n
taux = (1 + R) ^ dt
DF = (1 + R) ^ (-T)
u = Exp(Vol * Sqr(dt))
d = 1 / u
p = (taux - d) / (u - d)
bin = 0
wp=Application.WorksheetFunction.Floor(Abs(Log(K / S / d ^ n) / Log(u / d)), 1)
If CP = 1 then
    bin = bino(n, p, wp + 1, n)
else
    bin = bino(n, p, 0, wp)
EndIf
BinomialCOR = bin * K * DF
End Function

Function bino(n, p, wp, wc)
    bino = Application.WorksheetFunction.Binom_Dist_Range(n, p, wp, wc)
End Function
```

Code VBA – Binomial COR

```
Function BinomialCOR2(CP, S, K, T, R, Vol, n)
Dim dt As Double, taux As Double, bin As Double, p As Double, pp As Double
Dim wp As Integer
Dim u As Double, d As Double, DF As Double
dt = T / n
taux = (1 + R) ^ dt
DF = (1 + R) ^ (-T)
u = Exp(Vol * Sqr(dt))
d = 1 / u
p = (taux - d) / (u - d)
bin = 0
wp=Application.WorksheetFunction.Floor(Abs(Log(K / S / d ^ n) / Log(u / d)), 1)
If CP = 1 then
    bin = bino2(n, 1 - p, n wp - 1)
else
    bin = bino2(n, p, wp)
EndIf
BinomialCOR2 = bin* K * DF
End Function

Function bino2(n, p, w)
    bino2 = Application.WorksheetFunction.BinomDist(w, n, p, 1)
End Function
```

Code VBA – CRRBINOM

```
Function CRRBINOM(CP As String, S As Double, K As Double, vol As Double,
            R As Double, T As Double, n As Long) As Double

Dim dt As Double, taux As Double, p As Double, pp As Double
Dim wc As Integer, i As Integer, binp As Double, binpp As Double

dt = T / n
taux = (1 + R) ^ dt
u=exp(vol * sqr(dt))
D=1/u
p = (taux - d) / (u - d)
pp = p * u / taux
wc = Application.WorksheetFunction.Ceiling(Log(K / S / d ^ n) / Log(u / d), 1)
If CP = 1 then
        binp = BINO2(n - wc, n, 1 - p)
        binpp = BINO2(n - wc, n, 1 - pp)
        CRRBINOM = (S * binpp - K * binp / taux ^ n)
Else
        binp = BINO2(wc - 1, n, p)
        binpp = BINO2(wc - 1, n, pp)
        CRRBINOM = (-S * binpp + K * binp / taux ^ n)
EndIf
End Function
```

Exercice 06

Marché : u=2, d=1/2, R=1/4, S=4,

Instrument: Call avec prix d'exercice: K=5, Durée: T= 1 an

Modèle; N=6 - pas de calcul: 2 mois = 1/6 = 0,1666 an

- Calcul du taux période

Arbre des probabilités

- Calcul des probabilités RN: p et q
- Calcul des probabilités à maturité
- Calcul du nombre de chemins avec le coefficient binomial
- Vérifier que sur la somme des probabilités est égale à l'unité

Arbre des prix

- Calculer les valeurs finales
- Calculer le pay off final de l'option

Valorisation

- Calculer la valeur de l'option

Exercice 06- Correction

Marché : u=2, d=1/2, R=1/4, S=4, n=6

Instrument: K=5 T=1

Durée: 1 an = 6 périodes

Calcul du taux période

1+r = (1+R)^(1/6) = (1+0,25)^(1/6) = 1,0379 alors r = 3,79%

p= (1,0379 – 0,5) / (2-0,5) = 0,3585 et q=0,6414

Probabilités							Chemins	P finale
1	0,358594	0,128590	0,046111	0,016535	0,005929	0,002126	1	0,002126
0	0,641406	0,230004	0,082478	0,029576	0,010606	0,003803	6	0,022819
0	0,000000	0,411402	0,147526	0,052902	0,018970	0,006803	15	0,102040
0	0,000000	0,000000	0,263876	0,094624	0,033932	0,012168	20	0,243354
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,169251	0,060693	0,021764	15	0,326460
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,108559	0,038929	6	0,233571
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,069630	1	0,069630
								1,000000

Exercice 06 - Correction

Marché : u=2, d=1/2, R=1/4, S=4, n=6

Instrument: Call avec prix d'exercice: K=5

	S(6)	PayOff Call	Nb de Chemins	Probabilité	Probabilité	Valeur à t=6	Pay Off Put
6	256	251	1	0,002126	0,00213	0,5337	0
5	64	59	6	0,003803	0,02282	1,3463	0
4	16	11	15	0,006803	0,10204	1,1224	0
3	4	0	20	0,012168	0,24335	0,0000	1
2	1	0	15	0,021764	0,32646	0,0000	4
1	0,25	0	6	0,038929	0,23357	0,0000	4,75
0	0,0625	0	1	0,069630	0,06963	0,0000	4,9375
		chemins:	64		1,0000	3,0025	3,0025
		chemins:	64				2,4020

w(inf) = ln(K / (S . d^n)) / ln(u/d) = 3,08 donc wc=4 et wc*=2

W(sup) = ln(S . u^n / K) / ln(u/d) = 2,91 donc wp=3

Exercice 07

Marché : S=100 u=1,10   d=0,95 R=2%

Instrument: prix d'exercice: K = 105   durée: T=2 ans

Données: simulation avec n=21 pas

1 - Calculer: le taux d'intérêt de la période, les probabilité RN

2 - Produire l'arbre binomial du sous-jacent

3 - Produire l'arbre binomial des probabilités

4 - Calculer la valeur Wc pour le call et Wp pour le put, avec un K=105

5 - Calculer la valeur du call et du put

6 - Retrouver ces valeurs avec le programme VBA

7 - Donner une expression générale du Call à l'aide de la fonction LOI.BINOMIAL d'Excel

8 – Faire varier le nombre de pas: n – identifier la limite pratique de calcul sur n (en trouver la cause)

Exercice 07 - Correction

S=100, u=1,10 d=,95 n=21, R=5%, T=2 ans

Instrument: Call Tout ou Rien avec K=105 et S = 100 euros

Instrument: Asset Tout ou Rien avec K=105

n=100

1+r = 1,001888

DF = (1+r)^n = 1,0404

p = 0,3459   p* = 0,3798

q = 0,6541   q* = 0,6202

w = 7,6802

wc = 8 wp=7

wc* = 13

VF Call = 13,0660, Call = 12,5586

VF Put = 14,0260, Put = 13,4813

Relation de Parité : S – K/(1+r)^n

A=LOI.BINOMIALE(13;21;0,6541;1) = 0,4476

B=LOI.BINOMIALE(13;21;0,6202;1) = 0,5775

C=LOI.BINOMIALE(7;21;0,3459;1) = 0,5524

D=LOI.BINOMIALE(7;21;0,3798;1) = 0,4225

call:
B 100 - A . 105 / DF
= 57,7429 – 45,1843 = 12,5586
put:
-(1-B) 100 + (1-A) . 105 / DF
= -42,2571 + 55,7385 = 13,4813

	call	put
21	12,5586	13,4813
50	19,2399	20,1627
100	27,1016	28,0243
200	37,6751	38,5978
500	56,3893	57,3120
1000	72,9909	73,9136

Exercice 05 – Modèle Binomial

S=100, K=105, σ=20%, R=2%, T= 2 ans

Calculer le CALL et le PUT

Décomposer en options digitales

Exercice 05 - Correction

S=100, K=105, σ=20%, R=2%, T= 2 ans

Binomial	call	put
binaire cash	46,389875	54,532847
binaire titre	57,229743	42,770257
total	10,839868	11,762590

7 - Options Digitales

Pay Off Terminal

Détermination du pay-off sur valeurs terminales

Call: $(S>K).(S-K) = (S > K) . S - (S > K) .K$

Put : $(S<K).(K-S) = (S < K). K - (S > K) . S$

Option Digitale COR « cash ou rien » call: $(S>K) . 1$

Option Digitale COR « cash ou rien » put: $(S<K) . 1$

Option Digitale TOR « tout ou rien » call: $(S>K) . S$

Option Digitale TOR « tout ou rien » put: $(K>S) . S$

Option d'Echange

Pay-off de l'option d'Echange sur valeurs terminales

Option avec 2 sous-jacents

Call (S < X) (X - S)

Call (S > X) (S - X)

6 Options digitales:

COR (S > X) , 1

COR (S < X) , 1

TOR (S > X) , S

TOR (S < X) , S

TOR (S > X) , X

TOR (S < X) , X

Pay Off Path Dependant

Détermination du pay-off sur les (n+1) valeurs finales qui dépendent du « chemin suivi »

« path dependant option »

- option sur le maximum ou minimum du chemin (lookback option)
- option sur la moyenne des états du chemin (asian option)
- option digitale à barrière

Dans ces cas, il faut reprendre les calculs sur les 2^n chemins

Double Digital Option

Double Digitale (DDO): avec K1<K2.

Pay-off : si K1 < S < K2 pay-off = M sinon 0

$$DDO = \frac{M}{(1+r)^n} \cdot \sum_{i=w1}^{w2} \binom{n}{i} q^i p^{n-i}$$

- Achat ou Vente
- Complément: non(K1 < S < K2) = S > K1 ou S > K2
- Option TOR ou COR

Pricing par Arbitrage

Décomposition

- DDO: achat et vente de 2 options COR ou TOR avec la même maturité et des prix d’exercice différents: K1 et K2 avec $K1<K2$

- DDO in $= (S>K1 \text{ et } S<K2).M$
- $= (S<K2).M - (S<K1).M$
- $= (S>K1).M - (S>K2).M$

- DDO out $= (S<K1 \text{ ou } S>K2).M$
- $= (S<K1).M + (S>K2).M$

Options Digitales

Cash ou Rien /« Cash Or Nothing »: prix d'exercice K et maturité T

Le pay-off est dépendant du prix du sous-jacent S:

Acheteur du Call:	si S(T)>K	paiement de 1
	si S(T)<K	0
Acheteur du Put:	si S(T)<K	paiement de 1
	si S(T)>K	0

$$\mathrm{CBC} = \frac{1}{(1+r)^n} . \sum_{i=wc}^{n} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i}$$

$$\mathrm{PBC} = \frac{1}{(1+r)^n} . \sum_{i=0}^{wp} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i}$$

$$w_{\inf} = \frac{\ln(K/S/d \wedge n)}{\ln(u/d)}$$

$$\mathrm{CBC} = e^{-rT} N(d_2)$$

$$\mathrm{PBC} = e^{-rT} N(-d_2)$$

$$w_c = \mathrm{plafond}(w_{\inf})$$

$$w_p = w_c - 1$$

Options Digitales

<u>Titre ou Rien</u> / « Asset Or Nothing »: prix d'exercice K et maturité T

Le pay-off est dépendant du prix du sous-jacent S:

Acheteur du Call:	Si S(T)>K	paiement de S(T)
	Si S(T)<K	0
Acheteur du Put:	Si S(T)<K	paiement de S(T)
	Si S(T)>K	0

$$CBA = \frac{S}{(1+r)^n} . \sum_{i=wc}^{n} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i} . u^i . d^{n-i}$$

$$CBA = e^{-rT} . S . N(d_1)$$

$$PBA = \frac{S}{(1+r)^n} . \sum_{i=0}^{wp} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i} . u^i . d^{n-i}$$

$$PBA = e^{-rT} . S . N(-d_1)$$

$$w_{inf} = \frac{\ln(K/S/d\wedge n)}{\ln(u/d)}$$

$$w_c = \text{plafond}(w_{inf})$$

$$w_p = w_c - 1$$

Loi de Probabilité - Synthèse

Loi de probabilité discrète:

$$B(w,n,p) = \sum_{i=0}^{w} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$Call = B(w_c,n,p^*).S - \frac{K}{(1+r)^T} B(w_c,n,p).$$

$$Put = -B(w_p,n,p^*).S + \frac{K}{(1+r)^T} B(w_p,n,p).$$

$$w_c = plafond(\frac{\ln(K/S/d\wedge n)}{\ln(u/d)})$$

$$w_p = plancher(\frac{\ln(K/S/d\wedge n)}{\ln(u/d)})$$

$w_p < w_c$ et $w_p + w_c = n-1$

Loi de probabilité continue:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2}.dx$$

$$Call = N(d_1).S - \frac{K}{(1+r)^T} N(d_2)$$

$$Put = -N(-d_1).S + \frac{K}{(1+r)^T} N(-d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

Changement de probabilité

Terme avec pay-off constant: Put COR

$$\frac{K}{(1+r)^n}.\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}$$

Terme avec pay-off égal à S_T put TOR

$$=\frac{1}{(1+r).}\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.S.(u)^i.(d)^{n-i}(p)^i.(q)^{n-i}$$

$$=S.\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.\frac{(p.u)^i.(q.d)^{n-i}}{(1+r)^i.(1+r)^{(n-i)}}$$

$$=S.\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.(p^*)^i.(q^*)^{n-i}$$ avec

On retrouve la même formule que précédemment avec K actualisé remplacé par S, et (p,q) remplacé par (p*,q*) –

C’est un changement de probabilité

Formules Binomiales d'Options

Valorisation des options Call et Put par le modèle binomial:

CALL

$$CALL = \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}\max(S.u^i.d^{n-i}-K,0)$$

$$CALL = \sum_{i=wc}^{n}\binom{n}{i}.p*^i.q*^{n-i}S - \frac{K}{(1+r)^n}\sum_{i=wc}^{n}\binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}$$

PUT

$$PUT = \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}\max(K-S.u^i.d^{n-i},0)$$

$$PUT = -\sum_{i=0}^{wp}\binom{n}{i}.p*^i.q*^{n-i}S + \frac{K}{(1+r)^n}\sum_{i=0}^{wp}\binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}$$

8 – Monte Carlo

La méthode Monte Carlo

La méthode Monte Carlo consiste à effectuer des tirages aléatoires qui correspondent aux équations de diffusion du sous-jacent.

Cette diffusion représente est une modélisation.

La modélisation la plus courante en finance est le mouvement brownien standard:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Ce qui donne, une fois l'intégration effectuée:

$$S + \Delta S = S \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz)$$

Soit en mode discret:

$$S + \Delta S = S \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t})$$

avec ε, une variable aléatoire normale standardisée

Dans cette équation, nous défissions le drift comme: $(r-\sigma^2/2).dt$

Nombres d'Halton

Remplissage d'un espace de manière uniforme.

```
Function Halton(n, b)
Dim n0, n1, r As Integer
Dim H As Double
Dim f As Double
n0 = n
H = 0
f = 1 / b
While (n0 > 0)
    n1 = Int(n0 / b)
    r = n0 - n1 * b
    H = H + f * r
    f = f / b
    n0 = n1
Wend
Halton = H
End Function
```

n	b		n	b	
1	3	0,3333333	1	5	0,200000
2	3	0,6666667	2	5	0,400000
3	3	0,1111111	3	5	0,600000
4	3	0,4444444	4	5	0,800000
5	3	0,7777778	5	5	0,040000
6	3	0,2222222	6	5	0,240000
7	3	0,5555556	7	5	0,440000
8	3	0,8888889	8	5	0,640000
9	3	0,037037	9	5	0,840000
10	3	0,3703704	10	5	0,080000
11	3	0,7037037	11	5	0,280000
12	3	0,1481481	12	5	0,480000
13	3	0,4814815	13	5	0,680000

Méthode de Box Muller

Génération d'une (de 2) distribution normale N(0,1)

à partir de:

2 aléas uniformes: x et y

Sous Excel: x = alea() et y = alea()

$$BoxMuller = \sqrt{-2.Ln(x)}.Cos(2.\pi.y)$$

$$BoxMuller = \sqrt{-2.Ln(x)}.Sin(2.\pi.y)$$

```
Function BoxMuller(X As Double, y As Double) As Double
  BoxMuller = Sqr(-2 * Log(X)) * Cos(2 * Application.Pi() * y)
End Function
```

Pricing Quasi Monte Carlo

```
Function MonteCarlo(CP, S, K, T , R, voL, n)
Dim St As Double, sum As Double, Drift As Double, vSqrdt As Double
Dim i As Integer
Drift = (R  - vol ^ 2 / 2) * T
vSqrdt = vol * Sqr(T)
For i = 1 To n
   St = S * Exp(Drift + vSqrdt * BoxMuller(Halton(i, 3), Halton(i, 5)))
   sum = sum + max( CP * (St - K), 0)
Next
MonteCarlo = sum / n / ( 1 + R ) ^ T
End Function

Function BoxMuller(X As Double, y As Double) As Double
BoxMuller = Sqr(-2 * Log(X)) * Cos(2 * Application.WorksheetFunction.Pi() * y)
End Function
```

Exercice 09

On utilise les paramètres de marché suivants:

S=100, s=20%, n=100, r=2%

Calibrer avec le modèle CRR

Call et Put avec K=105 et T=2 ans

Calculer la valeur du call et du put avec BSM, décomposer en 2 options digitales

Calculer les mêmes options avec le modèle binomial avec n=100

Calculer les mêmes options avec le modèle quasi monte carlo avec n = 100 et halton(i,3) et halton(i,5)

Exercice 09 - Correction

S=100, K=105, σ=20%, R=2%, T= 2 ans

binomial: n=100

monte carlo: n=1000

T/n	0,02
sqrt(T/n)	0,14142136
1+r	1,000396
r	0,0396%
(1+r)^n	1,040400
u	1,028688
d	0,972112
p	0;500069
q	0,499931
p*	0,514070
q*	0,485930
w	50,86250
wc	51
wp	50

BSM	call	put
binaire cash	43,55043	57,37230
binaire titre	54,39315	45,60685
total = BSM	10,84272	11,76544

Quasi MC	call	put
binaire cash	44,40600	56,51672
binaire titre	55,04763	44,67576
total	10,64163	11,84096

Binomial	call	put
binaire cash	46,38987	54,53285
binaire titre	57,22974	42,77026
total	10,83987	11,76259

9 – Option d Echange

FINKEYS FRANCE

Rappels Statistiques

Calcul de l'espérance et de la variance de lois combinées.

Soit X et Y, deux variables aléatoires, de moyenne E(X) E(Y) et de variance V(X) et V(Y)

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$$

Statistiques de la somme: $S = X+Y$

$E[S] = E[X+Y\,] = E[X] + E[Y]$

$V[S] = V[X+Y\,] = V[X] + V[Y] + 2\ COV[X,Y]$

$V[S] = V[X+Y\,] = E[X^2] - E[X]^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 + 2\ COV[X,Y]$

avec

$COV[X,Y] = E[XY] – E[X]\ E[Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$

$V[S] = E[X^2] + E[Y^2] - E[X]^2 - E[Y]^2 + 2\ E[XY] – 2\ E[X]\ E[Y]$

Rappels Statistiques

Calcul de l'espérance et de la variance de lois combinées.

Soit X et Y, deux variables aléatoires, de moyenne E(X) E(Y) et de variance V(X) et V(Y)

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$$

Statistiques de la différence: D = X-Y

$$E[D] = E[X-Y\ ] = E[X] - E[Y]$$
$$V[D] = V[X-Y\ ] = V[X] + V[Y] - 2\ COV[X,Y]$$
$$V[D] = V[X-Y\ ] = E[X^2] - E[X]^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 - 2\ COV[X,Y]$$

avec

$COV[X,Y] = E[XY] - E[X]\ E[Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$

$$V[D] = E[X^2] + E[Y^2] - E[X]^2 - E[Y]^2 - 2\ E[XY] + 2\ E[X]\ E[Y]$$

Options d'Echange

L'option d'Echange est une généralisation du modèle BSM.

Il suppose les mêmes hypothèses que BSM.

Pay-off: max (S - X , 0) call S put X

<u>Données :</u>

T durée restante, R taux sans risque

sous-jacent S: volatilité: σ_S, taux f_S

sous-jacent X: volatilité : σ_X, taux f_X

corrélation entre S et X: ρ

<u>Valorisations (modèle de Margrage 1979):</u>

$$\sigma^2 = \sigma_S^2 + \sigma_X^2 - 2.\rho\sigma_S\sigma_X$$

$$d_S = \frac{\ln(S/X) + (f_X - f_S).T + \sigma^2.T/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_X = \frac{\ln(X/S) + (f_S - f_X).T + \sigma^2.T/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$CallSPutX = \frac{S.N(d_s)}{(1+fs)^T} - \frac{X.N(-d_x)}{(1+fx)^T}$$

$$PutSCallX = \frac{X.N(d_x)}{(1+fx)^T} - \frac{S.N(-d_s)}{(1+fs)^T}$$

Cette option est proche de l'option quotient

On retrouve BSM en « fixant » un actif à volatilité nulle.

Options d'Echange digitales

Pricing de 6 options digitales fondamentales:

(1) 1.(S < X), : N(-ds) / (1+R)^T

(2) 1.(S > X) : N(ds) / (1+R)^T

$$d_S = \frac{\ln(S/X) + (f_X - f_S).T + \sigma^2.T/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_X = \frac{\ln(X/S) + (f_S - f_X).T + \sigma^2.T/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

call: (3) S . (S > X) : S.N(ds) / (1+rs)^T

put: (4) X . (S > X) : X.N(-dx) / (1+rx)^T

put: (5) S . (S < X) : S.N(-ds) / (1+rs)^T

call: (6) X . (S < X) : X.N(dx) / (1+rx)^T

donc, par symétrie:

max(S-X,0) = S . (S > X) – X . (S > X) = (3) – (4)

max(X-S,0) = X . (S < X) – S . (S < X) = (6) – (5)

Exercice 06 Option d'Echange

Marché: X=100, σs =10%, rx=2%
Marché: X=115, σx =20%, rs=4%
Et ρ = 0,75 r = 1%

Produit: Option d'Echange avec T=2ans

Utiliser les 3 méthodes pour la valorisation de cette option :

Méthode Analytique : formule de Margrabe (1979)
Méthode: arbre binomial avec n=100
Méthode: Monte Carlo en 2 dimensions avec n=1000

1 - Calcul de la volatilité quotient
2 - Calcul de chaque option digitale
3 - Fabriquer un Monte Carlo à 2 assets corrélés
4 - Compter les cas S>X
5 - Calculer les différentes options digitales: 1 cash, et 2 titres
6 - Utiliser le binomial à 2 dimensions

Exercice 06 Option d'Echange - correction

Marché: S=100, σs =10%, rs=2%
Marché: X=115, σx =20%, rx=4%
Et ρ = 0,75 r=1%

Produit: Option d'Echange avec T=2ans, Call S Put X: max (S – X , 0)

Analytique:

Volatilité quotient: = 14,1421%, ds=-0.3988, dx=-0.5988
« S » =100 . 0,961169. N(-0,398810) = 33,161929
« X » =115 . 0,924556. N(-0,598810) = 29,201865
Call S Put X = 33,1619 – 29,2018 = **3,9600**
« X » =115 . 0,924556. N(0,598810) = 77,122099
« S » =100 . 0,961169. N(0,398810) = 62,954949
Put S Call X = 77,1221 – 62,9549 = **14,1671**

Monte Carlo	
X*(S>X)	29 480,32
S*(S>X)	33 587,80
S*(S<X)	64 440,98
X*(S<X)	78 686,26
1*(S>X)	638,00
1*(S<X)	362,00

MonteCarlo: (N=1000 et Halton (3,5) (9,11))

comptage: aléa1>aléa2 sans corrélation: 504
comptage: aléa1>aléa2 avec corrélation: 491
comptage: X>S avec corrélation: 638 (& 362 pour X<S)
drift de S = drifts = (r-rs-σ1.σ1/2)=(1%-2%-0,1*0,1/2) = -0,015
drift de X = driftx = (r-rx-σ2.σ2/2)=(1%-4%-0,2*0,2/2) = -0,050
Call= 32,28-27,25=**5,0273** Put= 72,75-61,94= **10,8112**

Monte Carlo		taux
X*(S>X)	27,256216	4,00%
S*(S>X)	32,283541	2,00%
S*(S<X)	61,938662	2,00%
X*(S<X)	72,749867	4,00%
1*(S>X)	0,625429	1,00%
1*(S<X)	0,354867	1,00%

Binomial (N=500):

Call= 3,9932 Put= 14,0726

10 – Options Quanto et Combo

Option Quanto

<u>Option avec 2 sous-jacents: un prix et une devise.</u>

$$\begin{cases} Fwd_1 : X(T)[S(T) - S^*] \\ Opt_1 : X(T).Max[S(T) - S^*,0] \end{cases} \qquad \begin{cases} Fwd_2 : X^*[S(T) - S^*] \\ Opt_2 : X^*.Max[S(T) - S^*,0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} Fwd_3 : X(T).S(T) - X^*.S^* \\ Opt_3 : Max[X(T).S(T) - X^*.S^*,0] \end{cases} \qquad \begin{cases} Fwd_4 : S(T).[X(T) - X^*] \\ Opt_4 : S(T).Max[X(T) - X^*,0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} Fwd_5 : S(T).X^* - X(T).S^* \\ Opt_5 : Max[S(T).X^* - X(T).S^*,0] \end{cases} \qquad \begin{cases} Fwd_6 : S^*.(X(T) - X^*) \\ Opt_6 : S^*.Max[X(T) - X^*,0] \end{cases}$$

(1): risque en S, et conversion à S(T)

(2): option quanto, risque en S, cours de conversion connu d’avance

(3): option combo, variable X.S

(4): equity linked fx contract

Forward et SwapQuanto

<u>Forward Quanto.</u>

Un modèle par arbitrage, identique à celui utilisé pour le change à terme n'est pas possible

$$\begin{cases} \mathrm{Fwd}_2 : X^*[S(T) - S^*] \\ \mathrm{Fwd}_3 : X(T).S(T) - X^*.S^* \end{cases}$$

C'est un produit « multi-asset »

C'est aussi un produit de « corrélation »

<u>Swap Quanto.</u>

C'est un swap, dont une jambe applique un taux d'intérêt à un nominal libellé dans une autre devise.

C'est un produit de spread.

Option Quanto

Quanto Option:

Le prix du sous-jacent et le prix d'exercice sont libellés dans la même devise.

La conversion dans la devise locale s'effectue, soit avec un cours donné d'avance (fixed) soit avec le cours donné à l'échéance (variable).

Notations :

- $\mathbf{S^F}$: Prix en devise étrangère
- $\mathbf{K^F}$: Prix d'exercise en devise étrangère
- $\mathbf{S_X}$: FX Spot
- $\mathbf{S_X^h}$: Spot Rate à maturité
- $\mathbf{S_0^F}$: FX Spot Rate $\mathbf{t_0}$ initial

$$S_0^F \times Max\left[S^F - K^F, 0\right]$$

$$S_X^h \times Max\left[S^F - K^F, 0\right]$$

Option Combo

Combo Option:

Le prix du sous-jacent et le prix d'exercice sont libellés dans des devises différents.

La conversion dans la devise locale s'effectue uniquement sur le prix du sous-jacent.

Notations :

- $\mathbf{S^F}$: Prix en devise étrangère
- $\mathbf{K^F}$: Prix d'exercise en devise étrangère
- $\mathbf{S_X}$: FX Spot
- $\mathbf{S_X^h}$: Spot Rate à maturité

$$Max\left[S_X^h \times S^F - K^E, 0\right]$$

Les Références

Livres en Français

- Options, Futures and Other Derivatives – John Hull
- Mathématiques Financières – Poncet, Portait, Hayat – 2nd éd 1996 - Dalloz
- Finance de Marché – Poncet, Portait – Nov 2008 - Dalloz

Livres en Anglais

- Options, Futures and Other Derivatives – John Hull
- Mathematics of Financial Derivatives – Wilmott, Howison, Dewynne
- Mathematical Techniques in Finance – Ales Cerny
- Option, Pricing & Volatility – Rouah Vainberg,Wiley Finance
- Advanced Modelling in Finance using Excel Vba – Jackson & Staunton
- Financial Modeling – Benninga

Les examens et certificats

- GARP :Global Association of Risk Professionals
- CFA: Certification for Financial Analysts