

## DOSSIER INDIVIDUEL

VERSION 01 – DU 8 NOVEMBRE 2019

---

# PRICING AVANCE POUR OPTIONS EXOTIQUES

---



## Evaluation

L'évaluation de ce cours portera sur la remise d'un devoir personnel qui sera réalisé individuellement.

L'objet du devoir est de valoriser une option double digitale (DDO) selon différentes méthodes. Les écarts de méthode sont en général inférieurs à 10%. Les résultats de valorisation de la même option devront donc être proches.

L'étudiant pourra remettre une Excel avec les résultats chiffrés.

L'annexe 1 présente les paramètres du problème pour chaque étudiant.

L'annexe 2 reprend la liste des questions/réponses.

### 1 – Théorie de l'arbitrage :

Les paramètres de marché sont présentés en annexe 1 pour chaque étudiant. Cette liste contient.

- $S_0$  : le prix du sous-jacent au temps  $t=0$ , valeur initiale,
- $R$  : le taux d'intérêt annuel, en %/an,
- $\sigma$  : la volatilité annuelle, en %/racine(an),

A partir des trois paramètres de marché définis ci-dessus, et des paramètres suivants :

- $T$  : la durée de l'option en années,
- $N$  : le nombre de périodes du modèle binomial.

Question :

Calculer :

- La durée du pas de simulation  $dt=T/n$
- Le facteur de capitalisation sur la durée de l'option :  $1+r = (1+R)^{dt}$
- Le facteur d'actualisation :  $DF = (1+R)^{-T} = (1+r)^{-n}$
- Les coefficients  $u$  et  $d$  dans l'hypothèse du modèle CRR
- Les probabilités risque neutre :  $p, q, p^*, q^*$

Vérifier l'additivité des probabilités

Vérifier la condition de non arbitrage

Calculer les expressions suivantes :  $(p-p^*)(q-q^*)$  et  $(pq)(p^*q^*)$

### 2 – Modèle binomial :

En prenant en compte le modèle binomial à  $N$  pas, et avec les probabilité  $(p,q)$  :

- calculer la valeur maximale et minimale du sous-jacent à maturité
- calculer les probabilités d'atteindre la valeur maximale et la valeur minimale (en notation scientifique  $x,xxxxE-xx$ , avec 4 décimales).

### 3 - Option digitale, modèle Binomial

Les options à valoriser sont deux options digitales avec les prix d'exercice  $K_1$  et  $K_2$ .

- Calculer les indices  $w_1$  et  $w_2$ , de  $K_1$  et  $K_2$ .
- Avec le modèle binomial, calculer la valorisation des deux CALL et des deux PUT.
- Vérifier la relation de parité CALL/PUT et calculer le prix des « contrats à terme » ayant pour cours à Terme  $K_1$  et  $K_2$ .

### 4 - Options, modèle BSM

Avec le modèle BSM programmé sous VBA :

- Call avec  $K_1$
- Put avec  $K_1$
- Calculer Call  $K_1$  moins Put  $K_1$
- Calculer le terme avec un contrat sur  $K_1$  :  $(S - K_1*DF)$

- Call avec K2
- Put avec K2
- Calculer Call K2 moins Put K2
- Calculer le terme avec un contrat sur K2 :  $(S - K2*DF)$

### 5 - Option digitale, simulation Monte Carlo

Avec le modèle de simulation Quasi-Monte Carlo programmé sous VBA, en prenant les paramètres suivants :

- N=1000 simulations,
- Génération des nombres de Halton avec 3 et 5,
- calculer la valorisation des deux CALL et des deux PUT.

### 6 – Options digitales et doubles digitales (DDO), modèle Binomial

Calculer les deux options digitales COR suivantes, avec un paiement de 100 euros à terme :

- Call COR de pay-off :  $(ST > K2) * 100$
- Put COR de pay-off :  $(ST < K1) * 100$

Utilisez les probabilités (p,q) pour les options COR.

L'option DDO est de type « in », donc exerçable si à terme le cours du sous-jacent est compris entre les deux prix d'exercice, soit :  $K1 < ST < K2$ , avec ST le cours du sous-jacent à terme.

soit un pay-off suivant pour une option COR :

- DDO COR “in”, de pay-off :  $(K1 < S1 < K2) * 100$

Calculer la valorisation de cette options double digitale de type « in » et COR suivante :

Faites la somme des 3 options précédentes en valeur actuelle.

Vérifier la relation de parité suivante :

$$\text{Call COR} + \text{Put COR} + \text{DDO COR} = 100 * DF$$

Calculer les deux options digitales TOR suivantes, avec un paiement de 100 euros à terme :

- Call COR de pay-off :  $(ST > K2) * ST$
- Put COR de pay-off :  $(ST < K1) * ST$

Utilisez les probabilités (p\*,q\*) pour les options TOR.

L'option DDO est de type « in », donc exerçable si à terme le cours du sous-jacent est compris entre les deux prix d'exercice, soit :  $K1 < ST < K2$ , avec ST le cours du sous-jacent à terme.

soit un pay-off suivant pour une option TOR :

- DDO TOR “in”, de pay-off :  $(K1 < S1 < K2) * ST$

Calculer la valorisation de cette options double digitale de type « in » et TOR suivante :

Faites la somme des 3 options précédentes en valeur actuelle.

Vérifier la relation de parité suivante :

$$\text{Call TOR} + \text{Put TOR} + \text{DDO TOR} = S0$$

### 7 - Calculer les prix des option DDO avec le modèle BSM.

Mêmes questions que précédemment en utilisant des formules analytiques de type BSM.

L'étudiant vérifiera que les résultats précédents utilisant le modèle binomial ne sont pas trop différents.

### 8 - Calculer les prix des options DDO avec le modèle Quasi Monte Carlo.

Mêmes questions que précédemment en utilisant une simulation Monte Carlo, avec N=1000 simulations et en utilisant les 2 premiers nombres premiers : 3 et 5, pour générer les nombres d'Halton.

On vérifiera que les résultats précédents utilisant le modèle binomial et BSM ne sont pas trop différents.

On vérifiera que la relation de parité de la DDO fonctionne pour les options COR.

Pourquoi cette relation n'est elle pas vérifiée pour les options TOR ?

**Date de remise :** Le samedi **23 novembre 2019**, 22h.

Adresse mail 8: philippe.duchemin@finkeys.com

## Annexe 01 - Sujets par élève.

### Options digitales DDO

|    | option DD            | S              | K1  | K2    | T   | r   | vol | N   |    |
|----|----------------------|----------------|-----|-------|-----|-----|-----|-----|----|
| 1  | BUSILLET             | Kévin          | 75  | 73,5  | 111 | 2   | 4%  | 20% | 33 |
| 2  | DAGUZAN              | Vincent        | 110 | 108   | 163 | 4   | 2%  | 15% | 37 |
| 3  | EL KHALFI EL IDRISSE | Basma          | 60  | 60    | 90  | 3   | 3%  | 20% | 32 |
| 4  | FRILAY               | Corentin       | 75  | 56,5  | 94  | 1,5 | 5%  | 12% | 48 |
| 5  | LOUISET              | Alan           | 145 | 101,5 | 174 | 2,5 | 3%  | 7%  | 35 |
| 6  | LY                   | Cire           | 85  | 66,5  | 109 | 2   | 4%  | 15% | 45 |
| 7  | MADIANE              | Faissal        | 75  | 71,5  | 116 | 2   | 2%  | 25% | 32 |
| 8  | MORIN                | Baptiste       | 110 | 91    | 146 | 4   | 3%  | 15% | 42 |
| 9  | NAILI                | Amina          | 60  | 55    | 85  | 3   | 5%  | 20% | 31 |
| 10 | RAMDANE              | Nabil          | 75  | 57,5  | 95  | 1,5 | 3%  | 12% | 30 |
| 11 | SAAYD                | Khaoula        | 145 | 104,5 | 177 | 2,5 | 3%  | 7%  | 48 |
| 12 | TOPAL                | Helin          | 80  | 63    | 103 | 2   | 4%  | 13% | 49 |
| 13 | WIART                | Valentin       | 145 | 128,5 | 201 | 4   | 2%  | 11% | 36 |
| 14 | TRAORÉ               | Cheikh-Tidiane | 85  | 67,5  | 110 | 3   | 3%  | 15% | 33 |
| 15 | OSSIALA SYL          | Dada Lenoble   | 75  | 66,5  | 104 | 1,5 | 5%  | 20% | 31 |

## Annexe 02 – Feuille de réponses.

Nom

Numéro d'élève

1

|   |    |       | Utiliser 4 décimales pour les prix: |  |
|---|----|-------|-------------------------------------|--|
| 0 | 1  | S     |                                     |  |
| 0 | 2  | K1    |                                     |  |
| 0 | 3  | K2    |                                     |  |
| 0 | 4  | T     |                                     |  |
| 0 | 5  | R     |                                     |  |
| 0 | 6  | vol   |                                     |  |
| 0 | 7  | N     |                                     |  |
| 1 | 8  | dt    |                                     |  |
| 1 | 9  | 1+r   |                                     |  |
| 1 | 10 | DF    |                                     |  |
| 1 | 11 | u     |                                     |  |
| 1 | 12 | d     |                                     |  |
| 1 | 13 | p     |                                     |  |
| 1 | 14 | q     |                                     |  |
| 1 | 15 | p*    |                                     |  |
| 1 | 16 | q*    |                                     |  |
| 1 | 17 | p+q   |                                     |  |
| 1 | 18 | p*+q* |                                     |  |

|   |    |     |                                |  |
|---|----|-----|--------------------------------|--|
| 1 | 19 |     | p-q                            |  |
| 1 | 20 |     | p*-q*                          |  |
| 1 | 21 |     | pq                             |  |
| 1 | 22 |     | p*q*                           |  |
| 2 | 23 |     | Smax                           |  |
| 2 | 24 |     | Smin                           |  |
| 2 | 25 |     | pmax                           |  |
| 2 | 26 |     | pmin                           |  |
| 3 | 27 | bin | w1                             |  |
| 3 | 28 | bin | w2                             |  |
| 3 | 29 | bin | call K1                        |  |
| 3 | 30 | bin | put K1                         |  |
| 3 | 31 | bin | call K1 - put K1               |  |
| 3 | 32 | bin | Terme K1                       |  |
| 3 | 33 | bin | call K2                        |  |
| 3 | 34 | bin | put K2                         |  |
| 3 | 35 | bin | Call K2 - Put K2               |  |
| 3 | 36 | bin | Terme K2                       |  |
| 4 | 37 | bsm | call K1                        |  |
| 4 | 38 | bsm | put K1                         |  |
| 4 | 39 | bsm | call K1 - put K1               |  |
| 4 | 40 | bsm | Terme K1                       |  |
| 4 | 41 | bsm | call K2                        |  |
| 4 | 42 | bsm | put K2                         |  |
| 4 | 43 | bsm | Call K2 - Put K2               |  |
| 4 | 44 | bsm | Terme K2                       |  |
| 5 | 45 | qmc | call K1                        |  |
| 5 | 46 | qmc | put K1                         |  |
| 5 | 47 | qmc | call K2                        |  |
| 5 | 48 | qmc | put K2                         |  |
| 6 | 49 | bin | call COR K2                    |  |
| 6 | 50 | bin | put COR K1                     |  |
| 6 | 53 | bin | DDO COR                        |  |
| 6 | 54 | bin | call COR K2+put COR K1+DDO COR |  |
| 6 | 51 | bin | call TOR K2                    |  |
| 6 | 52 | bin | put TOR K1                     |  |
| 6 | 55 | bin | DDO TOR                        |  |
| 6 | 56 | bin | call TOR K2+put TOR K1+DDO TOR |  |
| 7 | 56 | bsm | call COR K2                    |  |
| 7 | 57 | bsm | put COR K1                     |  |
| 7 | 58 | bsm | DDO COR                        |  |
| 7 | 59 | bsm | somme                          |  |
| 7 | 60 | bsm | call TOR K2                    |  |
| 7 | 61 | bsm | put TOR K1                     |  |
| 7 | 62 | bsm | DDO TOR                        |  |
| 7 | 63 | bsm | somme                          |  |
| 8 | 64 | qmc | call COR K2                    |  |
| 8 | 65 | qmc | put COR K1                     |  |
| 8 | 66 | qmc | DDO COR                        |  |
| 8 | 67 | qmc | somme                          |  |
| 8 | 68 | qmc | call TOR K2                    |  |
| 8 | 69 | qmc | put TOR K1                     |  |
| 8 | 70 | qmc | DDO TOR                        |  |
| 8 | 71 | qmc | somme                          |  |

